Preparatoria Olimpiada Matemática.

José Ángel Gálvez Gómez

1 Preguntas Cortas

Pregunta 1 *¿Cuál de los siguientes números es más grande?*

$$a)\ 10^{14} \quad b)\ \frac{27!}{18!} \quad c)\ 5^{18} \quad d)\ 3^{(3^3)}$$

Pregunta 2 *¿Qué numero es más grande:* 1.1^{10} *o* 2*?*

Pregunta 3 *En un reloj analógico el minutero y el horario se encuentran superpuestos entre la una y las dos. ¿Qué hora marca?*

Pregunta 4 *Demuestra que si* x *es irracional entonces* $\sqrt{x}$ *también es irracional.*

Pregunta 5 *Demuestra que* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *es irracional.*

Pregunta 6 *Demuestra que* a^2+b^2-ab *es positivo para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.

Pregunta 7 *¿Cuántos ceros consecutivos hay en la expresión decimal de* $20!+15!$ *(comenzando a contar por la derecha)?*

Pregunta 8 *Demuestra que si* n *es un número entero positivo* 4^n-1 *es siempre es un múltiplo de 3.*

Pregunta 9 *¿Cuántos números pares que no son múltiplo de 5 hay entre 0 y 2024?*

Pregunta 10 *Sea* $P(x)=ax^2+bx+c$ *un polinomio con dos raíces reales distintas* α, β. *Demuestra que* $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ *y* $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

Pregunta 11 *Demuestra que el anterior o el posterior a un número primo mayor a 3 es un múltiplo de 6.*

Sabiendo esto, demuestra que si $p>3$ *es primo, entonces* p^2-1 *es un múltiplo de 6. ¿Es cierto que es un múltiplo de 12 también?¿Y de 24?*

Pregunta 12 *¿Cuántos subtableros* $n \times n$ *hay en un tablero* 4×4*?*

Pregunta 13 *En el plano se sitúan* $2n$ *puntos distintos. Demostrar que es posible trazar una recta que separa el plano en dos semiplanos; cada uno con* n *puntos.*

Pregunta 14 *¿Pueden existir dos números consecutivos con exactamente 5 divisores?*

Pregunta 15 *Demuestra que para todo entero* n *se tiene que* n^3-n *es múltiplo de 6.*

Pregunta 16 *Sea P un polinomio de coeficientes reales tal que $P(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $P(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Pregunta 17 *A una reunión asisten 30 personas, algunas de las cuales ya se conocen entre sí. Demuestra que existen dos asistentes que conocen la misma cantidad de personas.*

Pregunta 18 *Demuestra que n es un número primo si y solo si $(n-1)!$ no es divisible por n.*

Pregunta 19 *Un polinomio de grado 2 con coeficientes enteros tiene una raíz racional. ¿Tiene que ser la otra raíz también racional?*

Pregunta 20 *¿Es posible colorear los números naturales con dos colores de modo que no existan progresiones aritméticas monocromáticas?*

Pregunta 21 *Demuestra que en un triángulo ABC de ángulos $A = 3\alpha, B = 2\alpha, C = \alpha$ se verifica*

$$c^2 = b^2 + ab.$$

Pregunta 22 *Encuentra todas las soluciones enteras positivas de*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1.$$

Pregunta 23 *Determina todos los enteros positivos $n \geq 2$ para los que $\frac{n^3+1}{n^2-1}$ es entero.*

Pregunta 24 *Calcula*

$$\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2n^2 + n} + \sqrt{n^3 + n^2}}.$$

Pregunta 25 *Determina todas las funciones $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que*

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Pregunta 26 *Determina todas las funciones $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ se tiene que*

$$f(f(x) + f(y)) = x + f(f(y)).$$

Pregunta 27 *Sean PQR los puntos medios de los lados de un triángulo ABC. Determinar el área de PQR en función del área de ABC.*

Pregunta 28 *Sean $\alpha, \beta, n \geq 1$ números enteros. Demuestra que*

$$\gcd(n^\alpha - 1, n^\beta - 1) = n^{\gcd(\alpha,\beta)} - 1.$$

Pregunta 29 *¿Es posible elegir un conjunto finito de números racionales $A = \{q_1, \cdots, q_n\}$ de modo que todo número racional $q \in \mathbb{Q}$ se pueda expresar como suma o resta de elementos de A?*

Pregunta 30 *Sean a, b, c números enteros positivos. Demuestra que*

$$\gcd(a, bc) \leq \gcd(a, b) \gcd(a, c).$$

Pregunta 31 *Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes reales de grado n. Supongamos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz de $P, P', \cdots, P^{n-1)}$. Demuestra que $P(x) = (x - \alpha)^n$.*

Pregunta 32 *Demuestra que si tomamos 5 números coprimos entre sí del 1 al 120, entonces hay al menos un primo entre ellos.*

Pregunta 33 *Sea Γ un grafo en el que todo vértice tiene grado n. Demuestra que*

$$n|V| = |E|.$$

2 Problemas Clásicos

Problema 1 *Demuestra que existen infinitos números primos.*

Problema 2 *Demuestra que existen infinitos números primos de la forma* $4k+3$*.*

Problema 3 *Demuestra que*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

es irracional.

Problema 4 *Demuestra que las bisectrices, las mediatrices, las alturas y las medianas de un triángulo* ABC *concurren.*

Problema 5 *En un polígono convexo de* n *lados no hay tres diagonales concurrentes. Demuestra*

1) *Hay* $\frac{n(n-3)}{2}$ *diagonales.*
2) *Hay* $\binom{n}{4}$ *intersecciones de dos diagonales.*

Problema 6 *Demuestra que no existe ningún polinomio no constante* P *de coeficientes enteros tal que* $P(n)$ *es primo para todo* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Problema 7 *Demuestra que existen infinitos números naturales que no se pueden escribir como suma de dos cuadrados.*

Problema 8 *Sea* p *un número primo. Demuestra que si* p *divide a* $n^p - n$ *entonces* p *divide a* $(n+1)^p - (n+1)$ *(en particular* $p \mid n^p - n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, este es el pequeño teorema de Fermat).*

Problema 9 *En un triángulo* ABC *se traza la mediana* m *en* C*. Demuestra que*

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m^2.$$

Problema 10 *Demuestra que en un grupo de seis personas o bien hay 3 que se conocen o bien hay 3 que no se conocen entre sí.*

Problema 11 *Sea* n *un número natural y denotemos por* $M_n = 2^n - 1$ *al* $n-$*ésimo número de Mersenne. Demuestra que*

i) *Si* M_n *es primo, entonces* n *es primo (en tal caso se dice que* M_n *es primo de Mersenne).*
ii) *Si* M_n *es primo, entonces* $2^{n-1}M_n$ *es un número perfecto.*
iii) *Si* p *es primo, entonces los factores primos de* M_p *son de la forma* $pk+1$*.*

Problema 12 *En una bolsa hay* n *monedas. Alice y Bob juegan, por turnos, a sacar una, dos o tres monedas. Sabiendo que Alice comienza el juego, determinar para que valores de* n *Alice tiene estrategia ganadora.*

Problema 13 *Demuestra que la suma* $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ *no es un número entero para ningún* $N > 1$*.*

3 Problemas Largos

Problema 14 *En el plano se colocan $2n$ puntos. Demostrar que es posible trazar n segmentos con vértices en los $2n$ segmentos de forma que no existan dos segmentos que se crucen.*

Problema 15 *Sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números enteros positivos tal que $a_{i+2} \leq \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Demuestra $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es constante a partir de cierto término.*

Problema 16 *Determinar los valores de n para los que, en un tablero $n \times n$, es posible llegar de una esquina a la esquina opuesta, realizando únicamente movimientos a casillas adyecentes y pasando por cada casilla exactamente una vez.*

Problema 17 *En una fila hay n cajas. La primera caja contiene 1 canica, la segunda caja contiene 2 canicas,..., la caja en la posición i contiene i canicas. Determinar todos los valores de n para los que es posible repartir las cajas entre dos personas de modo que cada persona tenga la misma cantidad de canicas.*

Problema 18 *Se conectan n ciudades, una de las cuales es Roma, con caminos, de modo que es posible llegar de una ciudad a cualquier otra. Cada camino se señaliza indicando un sentido en el que puede recorrerse. Decimos que todos los caminos llevan a Roma si partiendo de cualquier ciudad cualquier recorrido llega eventualmente a Roma.*

Demostrar que siempre es posible señalizar los caminos de modo que todos los caminos lleven a Roma.

Problema 19 *Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales y m un número impar menor o igual que n de modo que el producto de m de ellos cualesquiera es mayor o igual a 1. Demuestra que $a_1a_2...a_n$ es mayor o igual a 1.*

Problema 20 *Sea $n \geq 2$. Un tablero $n \times n$ se pinta de blanco y negro de modo que tres esquinas son blancas y una negra. Demuestra que existe un cuadrado 2×2 en el que tres casillas son del mismo color.*

Problema 21 *En el plano se sitúan $n > 1$ puntos distintos de forma que para cada par de puntos distintos A, B , existe un tercer punto C tal que ABC es un triángulo equilátero. Demuestra que no puede haber más de tres puntos.*

Problema 22 *Sea n un número natural. Se disponen de infinitas huchas vacías. Un movimiento consiste en colocar n monedas en n huchas distintas. Determinar en función de n el mínimo de monedas necesarias para que después del primer movimiento todas las huchas no vacías tengan una cantidad distinta de monedas.*

Problema 23 *Un tablero se extiende indefinidamente hacia arriba y hacia la derecha de forma que las casillas disponibles son aquellas de coordenadas (n, m), con n, m enteros no negativos. Inicialmente se colocan tres fichas en las casillas $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 1)$. Si las casillas $(n + 1, m)$ y $(n, m + 1)$ están libres y la casilla (n, m) contiene una ficha, se puede realizar un movimiento eliminando la ficha de coordenadas (n, m) y colocando dos fichas en las casillas $(n+1, m)$ y $(n, m+1)$. Demostrar que no es posible eliminar las tres fichas iniciales después de una cantidad finita de movimientos.*

Problema 24 *Los números naturales se colorean de azul y rojo de modo que la suma de dos racionales de color azul es de color azul y el producto de dos racionales de color rojo es rojo. Determinar todas las coloraciones posibles.*

4 Problemas de Olimpiada

4.1 Fase Local

Problema 25 (Problema 6, Fase Local, 1998) *En el triángulo ABC de área 100, M es el punto medio del lado AC y P es un punto del lado AB tal que el triángulo AMP tiene área 36. La paralela a PM por B corta al lado AC en Q. Determinar el área del triángulo MPQ.*

Problema 26 (Problema 3, Fase Local, 2018) *Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional*

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y,$$

cualesquiera sean x, y reales.

Problema 27 (Problema 5, Fase Local, 2018) *Sean a, b, c números naturales primos, distintos dos a dos. Demostrar que el número*

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

es un múltiplo del producto abc.

Problema 28 (Problema 2, Fase Local, 2021) *Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de m filas y n columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.*

Problema 29 (Problema 4, Fase Local, 2022) *Un grupo de 12 piratas de edades diferentes se reparte 2022 monedas, de manera que cada pirata (salvo el más joven) tiene una moneda más que el siguiente más joven. A continuación, cada día se procede de la siguiente manera: se escoge a un pirata que tenga al menos 11 monedas, y ese da una moneda a todos los demás. Encontrar el mayor número de monedas que un pirata puede llegar a tener.*

Problema 30 (Problema 1, Fase Local, 2023) *Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \cdots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que cualquier par (a, b), con $a < b$ y de manera que $a|b$, satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cuál esta situación es posible.*

Problema 31 (Problema 2, Fase Local, 2023) *Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Los primeros n enteros positivos, $1, 2, \cdots, n$, se escriben en una pizarra. María realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra, y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determinar todos los enteros positivos n para los que María puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.*

Problema 32 (Problema 3, Fase Local, 2023) *Decimos que una terna de números reales (a, b, c), todos distintos de cero, es local si*

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2, \\ b^2 + b &= c^2, \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

(a) Probar que si (a, b, c) es local, entonces $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

(b) Sea $A_1A_2 \cdots A_9$ un enéagono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que $|A_1A_4| = 1$, y sea $|A_1A_2| = a, |A_1A_3| = b$ y $|A_1A_5| = c$. Probar que $(a, b, -c)$ es local.

Problema 33 (Problema 4, Fase Local, 2023) *Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.*

Problema 34 (Problema 5, Fase Local, 2023) *Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número*

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Problema 35 (Problema 6, Fase Local, 2023) *Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen*

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

4.2 Fase Autonómica

Problema 36 (Problema 1, OMA, 2023) *Tenemos piezas cuadradas de tamaño 1×1 en las que podemos pintar cada borde de un color A, B, C, D, no repitiéndose colores en cada pieza. Formamos un rectángulo $n \times m$ pegando piezas cuadradas con la condición de que los bordes que se pegan son del mismo color. ¿Para qué números n y m es esto posible si en cada lado del rectángulo los bordes de las piezas que lo forman son del mismo color, y en los cuatro lados del rectángulo aparecen los cuatro colores?*

Problema 37 (Problema 2, OMA, 2023) *Determina todos los números enteros positivos primos p, q, r, que verifican: $p + q + r = 2023$ y $pqr + 1$ es un cuadrado perfecto.*

Problema 38 (Problema 3, OMA, 2023) *Encuentra todas las funciones crecientes $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que para cada $m, n \in \mathbb{N}$*

$$f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2,$$

Se recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ y que una función f es creciente cuando $f(m) \leq f(n)$ si $m < n$.

Problema 39 (Problema 4, OMA, 2023) *Encuentra todos los números naturales $n \geq 3$ para los que es posible rellenar un polígono regular de n lados con al menos dos polígonos regulares sin solapamientos (los polígonos del recubrimiento pueden tener distinto número de lados).*

Problema 40 (Problema 3, OMA, 2024) *Sea n un número natural. En un tablero infinito se coloca en cada casilla una moneda, cada moneda tiene dos estados; cara o cruz. Inicialmente todas las monedas se encuentran en cruz. Un movimiento consiste en voltear las n^2 monedas de un cuadrado $n \times n$. Determinar en función de n el número de caras que pueden quedar tras efectuar un número finito de movimientos.*

4.3 Fase Nacional

Problema 41 (Problema 2, OME, 2016) *Sea p un número primo positivo dado. Demostrar que existe un entero α tal que $\alpha(\alpha - 1) + 3$ es divisible por p si y sólo si existe un entero β tal que $\beta(\beta - 1) + 25$ es divisible por p.*

Problema 42 (Problema 4, OME, 2016) *Sean $m \geq 1$ un entero positivo, a y b enteros positivos distintos mayores estrictamente que m^2 y menores estrictamente que $m^2 + m$. Hallar todos los enteros d, que dividen al producto ab y cumplen $m^2 < d < m^2 + m$.*

Problema 43 (Problema 2, OME, 2019) *Determinar si existe un conjunto finito S formado por números primos positivos de manera que para cada entero $n \geq 2$, el número $2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ sea múltiplo de algún elemento de S.*

Problema 44 (Problema 1, OME, 2024) *Consideramos 2024 números primos distintos $p_1, p_2, \cdots, p_{2024}$ tales que*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{1012} = p_{1013} + p_{1014} + \cdots + p_{2024}.$$

Sea $A = p_1 p_2 \cdots p_{1012}$ y $B = p_{1013} p_{1014} \cdots p_{2024}$. Demuestra que $|A - B| \geq 4$.

Problema 45 (Problema 4, OME, 2024) *Sean a, b, c, d cuatro números reales que satisfacen*

$$abcd = 1 \text{ y } a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} + d + \frac{1}{d} = 0.$$

Demuestra que alguno de los números ab, ac, ad es igual a -1.

Problema 46 (Problema 5, OME, 2024) *Dados dos puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ en el plano, denotamos por $\mathcal{R}(p_1, p_2)$ el rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas que tiene los dos puntos como esquinas opuestas, es decir:*

$$\mathcal{R}(p_1, p_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{mín}(x_1, x_2) \leq x \leq \text{máx}(x_1, x_2), \text{mín}(y_1, y_2) \leq y \leq \text{máx}(y_1, y_2)\}.$$

Determina el mayor valor de k tal que el siguiente enunciado es cierto: "para todo conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$, con $|S| = 2024$, existen dos puntos $p_1, p_2 \in S$ tales que $|S \cap \mathcal{R}(p_1, p_2)| \geq k$".

Problema 47 (Problema 6, OME, 2024) *Sean a, b y n enteros positivos, que satisfacen que bn es divisor de $an - a + 1$. Sea $\alpha = a/b$. Demuestra que, al dividir los números*

$$\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \cdots, \lfloor (n-1)\alpha \rfloor$$

entre n, los restos resultantes son iguales a $1, 2, ..., n-1$, en algún orden.

4.4 Fase Internacional

Problema 48 (Problema 1, IMO, 2024) *Determina todos los números reales α tales que, para cada entero positivo n, el entero*

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

es un múltiplo de n.

(Obsérvese que $\lfloor z \rfloor$ denota el entero más grande que es menor o igual que z. Por ejemplo, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ y $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Problema 49 (Problema 2, IMO, 2024) *Determinar todas las parejas (a, b) de enteros positivos para las que existen enteros positivos g y N tales que*

$$mcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

se cumple para todo $n \geq N$.

(Nota: $mcd(x, y)$ denota el máximo común divisor de x e y.)

Problema 50 (Problema 3, IMO, 2024) *Sea $a_1, a_2, a_3, \cdots$ una sucesión infinita de enteros positivos, y sea N un entero positivo. Supongamos que, para cada $n > N$, a_n es igual al número de veces que aparece el valor a_{n-1} en la lista $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$.*

Demostrar que al menos una de las sucesiones $a_1, a_3, a_5, \cdots$ y $a_2, a_4, a_6, \cdots$ es eventualmente periódica.

(Una sucesión infinita $b_1, b_2, b_3, \cdots$ es eventualmente periódica si existen enteros positivos p y M tales que $b_{m+p} = b_m$ para todo $m \geq M$.)

Problema 51 (Problema 4, IMO, 2024) *Sea ABC un triángulo con $AB < AC < BC$. Sean I y ω el incentro y el incírculo del triángulo ABC, respectivamente. Sea X el punto de la recta BC, diferente de C, tal que la recta paralela a AC que pasa por X es tangente a ω. Análogamente, sea Y el punto de la recta BC, diferente de B, tal que la recta paralela a AB que pasa por Y es tangente a ω. La recta AI corta de nuevo al circuncírculo del triángulo ABC en $P \neq A$. Sean K y L los puntos medios de AC y AB, respectivamente. Demostrar que $\angle KIL + \angle YPX = 180$.*

Problema 52 (Problema 5, IMO, 2024) *El caracol Turbo juega un juego en un tablero con 2024 filas y 2023 columnas. En 2022 de las casillas del tablero se han escondido monstruos. Inicialmente, Turbo no sabe donde está ninguno de los monstruos, pero sabe que hay exactamente un monstruo en cada fila excepto en la primera y en la última fila, y que cada columna contiene a lo más un monstruo.*

Turbo hace una serie de intentos para ir de la primera a la última fila. En cada intento, elige empezar en cualquier casilla de la primera fila y a continuación repetidamente se mueve a una casilla vecina con la que comparta un lado. (Le está permitido regresar a una casilla visitada previamente.) Si llega a una casilla con un monstruo, su intento termina y es transportado de vuelta a la primera fila para comenzar un nuevo intento. Los monstruos no se mueven, y Turbo recuerda si en cada casilla visitada hay o no hay un monstruo. Si llega a una casilla de la última fila, su intento termina y el juego finaliza.

Determinar el menor valor de n para el cual Turbo tiene una estrategia que le garantiza llegar a la última fila en el n-ésimo intento o antes, independientemente de la ubicación de los monstruos.

Problema 53 (Problema 6, IMO, 2024) *Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Una función $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ se llama* acuaesuliana *si se satisface la siguiente propiedad: para cada $x, y \in \mathbb{Q}$,*

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{o} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Demostrar que existe un entero c tal que para toda función acuaesuliana f hay a lo más c números racionales distintos de la forma $f(r) + f(-r)$ para algún número racional r, y encontrar el menor valor posible de c.