Juegos combinatorios

TIMM, 16 de noviembre de 2024

Un juego combinatorio es un juego para dos jugadores que hacen movimientos por turnos, con reglas perfectamente definidas, y en los que no hay elementos de azar (como dados) ni información oculta (como en los juegos de cartas en que desconocemos la mano del adversario).

Decimos que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora cuando puede idear un procedimiento de manera que, haga lo que haga su adversario, saldrá victorioso.

Ejemplos de juegos combinatorios son los siguientes:

1. Nim es un juego muy conocido en que dos jugadores se turnan para retirar piezas (que pueden ser piedras, fichas, cerillas,...) que se han distribuido al inicio de la partida en montones. El número de piezas y de montones es arbitrario, y los montones no tienen que tener el mismo número de piezas. En cada turno, el jugador debe retirar una o más piezas de un mismo montón. Gana el jugador que retira la última pieza.

   Existen estrategias ganadoras para el primer o el segundo jugador dependiendo del número de piedras en cada montón. Por ejemplo, si hay dos montones con el mismo número de piedras, siempre podrá ganar el segundo jugador retirando tantas piedras como el jugador anterior, pero del otro montón. Si hay dos montones con distinto número de piedras, el primer jugador tendrá estrategia ganadora retirando tantas piedras del montón más grande como haga falta para igualar los dos montones.

2. Hay otro juego en que dos jugadores, Alicia y Bruno, que tienen un número ilimitado de monedas, juegan sobre un tablero redondo. En cada turno, el jugador debe situar una moenda en el tablero sin desplazar a ni solaparse con monedas anteriormente colocadas. Pierde la persona que no pueda colocar una nueva moneda dentro del tablero.

   Si Alicia coloca la primera moneda en el centro del tablero tablero, luego solo tiene que centrar cada moneda en el punto del tablero que es simétrico respecto del centro del tablero al centro de la moneda que ha colocado Bruno. De este modo, se asegura la victoria porque ella siempre tendrá espacio para una nueva moneda.

Los siguientes son problemas de olimpiadas en los que se plantea un juego combinatorio y se pide encontrar una estrategia ganadora para alguno de los jugadores:

1. **(Italia TST 2009)** Alicia y Bruno juegan de la siguiente forma. Primero Alicia escribe una permutación cualquiera de los números 1 a n, donde n es un número entero mayor que 1 que han fijado previamente. En cada turno, quien juega debe escribir una secuencia de números que no haya sido escrita antes y que cumpla una de las dos condiciones siguientes:

(a) la secuencia es una permutación de la que ha escrito el jugador anterior o

(b) la secuencia se obtiene de la anterior borrando uno de sus números.

Por ejemplo, si Alicia empieza escribiendo 4132, Bruno podría escribir 3124 o 412.

El jugador que no puede escribir una secuencia pierde. ¿Quién tiene una estrategia ganadora y en qué consiste?

2. **(USAMO 1999)** Dos jugadores juegan con una cuadrícula 1×2000, es decir, 2000 casillas formando una fila. En cada turno, se escribe S u O en una casilla vacía. El primer jugador que consigue que se lea SOS en tres casillas consecutivas gana. Si se rellenan todas las casillas sin que aparezca la palabra SOS, el juego acaba en empate. Prueba que el segundo jugador tiene una estrategia ganadora y explica en qué consiste.

3. **(San Petersburgo 1997)** El número N es el producto de k primos distintos ($k \geq 3$). Alicia y Bruno se turnan escribiendo divisores compuestos de N en una pizarra de acuerdo con las siguientes reglas:

   (a) No se puede escribir N.

   (b) No pueden aparecer número coprimos (cuyo máximo común divisor sea 1).

   (c) No pueden aparecer dos números de nmodo que uno divida al otro.

   Pierde el primer jugador que no pueda escribir un nuevo número. Si empieza jugando Alicia, ¿quién tiene una estrategia ganadora y en qué consiste?

4. **(USAMO 2004)** Alicia y Bruno juegan en una cuadrícula 6×6. En su turno, cada jugador elige un número racional que no aparezca en la cuadrícula y lo escribe en una casilla vacía. Alicia comienza el juego. Cuando todas las casillas tengan número, se colorea de negro en cada fila la casilla con el número más alto. Alicia gana si puede trazar un camino, entre la parte superior e inferior de la cuadrícula, formado por 6 casillas negras de modo que dos casillas consecutivas siempre tengan un vértice en común. Bruno gana si no existe tal camino. Encuentra una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

Más problemas de este tipo en https://mathematical.olympiad.ch/de/skripts. En la sección Kombinatorische Spiele hay apuntes y ejercicios. Y en capítulo 5 del libro Olympiad Combinatorics de Pranav A. Sriram se pueden encontrar las soluciones de los 4 problemas propuestos aquí y algunas más.