Juegos combinatorios

Mariángeles Gómez Molleda

TIMM joven 24-25

Nim

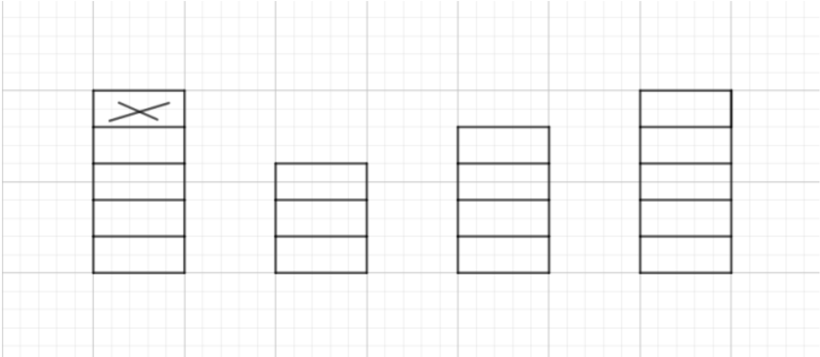
Nim es un juego en el que dos jugadores se turnan para retirar piezas (que pueden ser piedras, fichas, cerillas,...) que se han distribuido al inicio de la partida en montones.

El número de piezas y de montones es arbitrario, y los montones no tienen que tener el mismo número de piezas.

En cada turno, el jugador debe retirar una o más piezas de un mismo montón.

Gana el jugador que retira la última pieza.

Podemos jugar a Nim dibujando los montones de piezas en nuestro cuaderno. Así, por ejemplo:



El jugador que retire piezas de un montón solo tiene que tacharlas.

Ejercicio 1

Alicia y Bruno disponen de 5 piezas para jugar a Nim.

- ¿Cuántos juegos distintos pueden iniciar con 5 piezas?

Decimos que un jugador tiene una estrategia ganadora cuando, no importa qué movimientos haga el otro, este jugador puede, en cada turno, realizar una jugada de modo que, al final, se erija en ganador.

- Para cada uno de los juegos del apartado anterior, ¿podemos decir cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora?

Nota: Juegan por orden alfabético, así que Alicia tiene el primer turno en cada partida.

Ejercicio 2

Para tratar de comprender el juego de Nim, analizaremos algunas de las versiones más sencillas. Así, comenzaremos jugando con solo dos montones de piezas:

(a) ¿Qué ocurrirá si los dos montones tienen el mismo número de piezas? ¿Alguien tiene una estrategia ganadora? ¿En qué consiste?

(b) ¿Y si los dos montones tienen distinto número de piezas?

Ejercicio 3

Ahora usaremos lo que hemos aprendido con dos montones de piezas para analizar los juegos que tienen un número par de montones, todos con el mismo número de piezas.

(a) ¿Qué ocurrirá si hay cuatro montones con el mismo número de piezas? ¿Alguien tiene una estrategia ganadora? ¿En qué consiste?

(b) ¿Y si son seis montones con el mismo número de piezas?

(c) ¿Podemos generalizar las estrategias anteriores a cualquier número par de montones con el mismo número de piezas?

Ejercicio 4

En el ejercicio anterior todos los montones tienen el mismo número de piezas. Vamos a pensar algunos casos en que los montones tengan distinto número de piezas.

(a) ¿Y si los montones no tienen todos el mismo número de piezas, pero se pueden emparejar de dos en dos, cada par con el mismo número de piezas? Por ejemplo, cuando tenemos dos montones con 3 piezas, otros dos con 4 piezas y otros dos con 5 piezas?

(b) Cuando tenemos tres montones con 3, 4 y 5 piezas, no nos sirven las ideas anteriores, pero podemos decir que Alicia tiene estrategia ganadora. ¿La habéis encontrado? ¿No? Entonces es buena idea pensar antes en tres montones de 1, 2 y 3 piezas.

Bibliografía para Nim

Los ejercicios que hemos propuesto están resueltos en este documento:

- Ryan Julian, *The Game of Nim*, Madison Math Circle, *https://wiki.math.wisc.edu/images/Nim_sol.pdf*

Podéis seguir probando estrategias en otras versiones de Nim, con diferentes números de piezas y de montones. El problema se complica bastante... pero tiene solución. El matemático Charles L. Bouton (1901–1902) encontró una estrategia curiosa y un poco complicada (hay que escribir números en binario) que publicó aquí:

- C. L. Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, https://www.jstor.org/stable/1967631

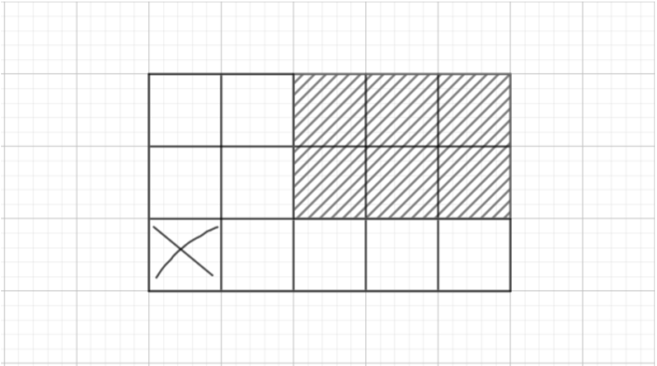
Chomp

Chomp es un juego en el que dos jugadores se turnan para llevarse algunas onzas de una tableta de chocolate.

En su turno, el jugador elige una onza de la tableta y se lleva el rectángulo formado por esta onza y todas las onzas que están a su derecha y por encima.

Pierde la partida el jugador que se lleve la onza envenenada de la esquina inferior izquierda de la tableta.

Podemos jugar a Chomp dibujando la tableta de chocolate en nuestro cuaderno. Así, por ejemplo:



Esta tableta tiene tamaño 3×5. El primer jugador (puede seguir siendo Alicia) se ha llevado la parte de la tableta que está rayada.

Ejercicio 5

Como con Nim, empezaremos analizando casos sencillos.

(a) ¿Quién tiene una estrategia ganadora cuando la tableta es de tamaño $1 \times n$? Esto son tabletas con una sola fila de onzas en las que la primera onza, la de la izquierda, está envenenada.

(b) ¿Cambia algo la situación si la tableta es de tamaño $n \times 1$? Esto es una torre de onzas en la que la onza inferior está envenenada.

Bibliografía para Chomp

En realidad, se puede demostrar que en el Chomp la persona que empieza el juego tiene una estrategia ganadora. La demostración es curiosa y la podéis encontrar aquí:

- Eva Elduque, *The Game of Chomp*, Madison Math Circle, https://wiki.math.wisc.edu/images/Chomp_Sol.pdf

o en el artículo de David Gale, que es quien, al parecer, reinventó este juego en forma de tableta de chocolate:

- D. Gale, *A Curious Nim-type game*, The American Mathematical Monthly Vol. 81, No. 8 (Oct., 1974). https://www1.cmc.edu/

Lo curioso es que, aunque nos demuestran que el jugador inicial tiene una estrategia ganadora, no nos dicen cuál es. Así que toca seguir buscando...

Ejercicio 6

Complicando el juego un poquito más:

- ¿Cómo se las puede arreglar Alicia para ganar siempre cuando la tableta tiene solo dos filas de onzas?

Ejercicio 7

¿Y si la tableta es un cuadrado?

(a) Pensamos primero en un cuadrado 2×2, aunque este caso ya lo habremos resuelto antes.

(b) Luego en un cuadrado 3×3.

(c) Y ahora en un cuadrado $n \times n$.

Ejercicio 8

Cuando la tableta tiene 3 filas de onzas, el problema se complica...

- ¿Cómo se las puede arreglar Alicia para ganar siempre con una tableta 3×5?