Taller de Ingenio Matemático de Málaga

Dualidad en Geometría: Concurrencia vs. Colinealidad

Saúl Burgos (UGR)

Principio de Dualidad

El **principio de dualidad** es una característica muy interesante que proviene de la geometría proyectiva. Una manera de rápida de ver la dualidad es fijarse en los axiomas del plano proyectivo

Axioma 1. Dos puntos determinan (yacen en) una única recta.

Axioma 2. Dos líneas se intersecan en un único punto.

Axioma 3. Existen cuatro puntos, de los cuales no hay tres colineales.

Principio de dualidad: El **dual** de un enunciado sobre un plano proyectivo es el enunciado que obtenemos al intercambiar las palabras *punto* y *recta* y las frases *yacen en* y *se intersecan en* (o usando sinómimos). Cualquier enunciado sobre un plano proyectivo es verdadero si y sólo si su dual es verdadero.

Ejercicio 1. Enuncia los **axiomas duales del plano proyectivo** y muestra con un dibujo que son equivalentes a los de arriba.

Un ejemplo clásico sobre teoremas duales son el **Teorema de Ceva** y el **Teorema de Menelao.** Pueden ser enunciados juntos de tal manera que la dualidad entre ellos es evidente:

Teorema. Sea ABC un triángulo y sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (distintos de A, B y C).

Teorema de Ceva. Las rectas AD, BE, CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Teorema de Menelao. Los puntos D, E, F son colineales si y sólo si

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

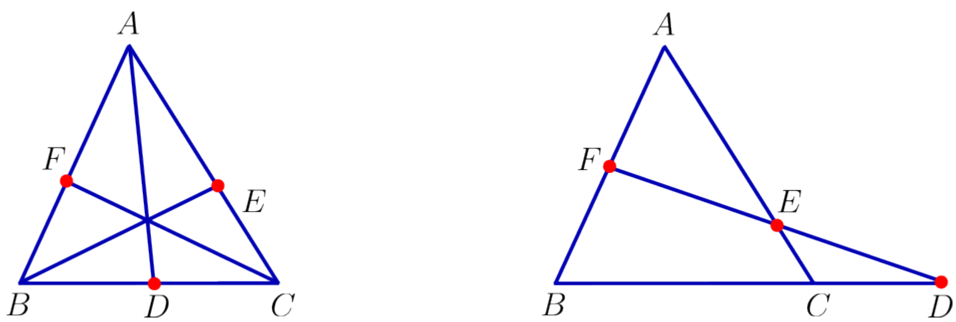


Figura 1: Izquierda: Configuración del teorema de Ceva. Derecha: Configuración del teorema de Menelao

Ejercicio 2. Demuestra el teorema de Ceva y el teorema de Menelao.

Ejercicio 3. Demuestra el teorema de Menelao asumiendo Ceva como cierto (esto no requiere el uso de dualidad).

Otros ejemplos clásicos de dos teoremas que son duales, y de los cuales no hablaremos mucho hoy, son: el **teorema de Desargues** y el **recíproco del teorema de Desargues**; y el **teorema de Pascal** y el **teorema de Brianchon**.

Transformada polar

La manera de asignar puntos a rectas y rectas a puntos puede parecer arbitraria. Formalmente, esto se hace a través de unas transformaciones llamadas *involuciones biyectivas* que satisfacen las propiedades que queremos: envían puntos en rectas, rectas en puntos y preservan la incidencia de puntos y rectas, es decir:

$$P \text{ yace en } l \Leftrightarrow f(l) \text{ yace en } f(P).$$

Una transformación que tiene las propiedades deseadas y que envía un enunciado en su dual y viceversa es: **la transformada polar**. A continuación describimos los pasos para obtener la transformada polar de un punto y de una recta dado un círculo fijo.

Construcción de la transformada polar: Dado un círculo Ω en el plano con centro O.

Paso 1. Dado un punto A en el plano (distinto de O), consideramos dos secantes l y n de Ω que pasen por A y cortan a Ω en C, B y D, E, respectivamente.

Paso 2. Sea X el punto de intersección de BD con CE y sea Y el punto de intersección de BE con CD.

Paso 3. La recta a que pasa por X e Y es la **polar de** A mientras que A es llamado el **polo de** a.

Para construir el polo A dada la polar a trazamos la perpendicular desde O hacia a y hallamos la polar del pie de altura X. El punto de intersección de x y OX es el polo A. En la figura 3. podemos ver también como se construye la polar de un punto en el interior de Ω. Más específicamente, la recta AY es la polar de X.

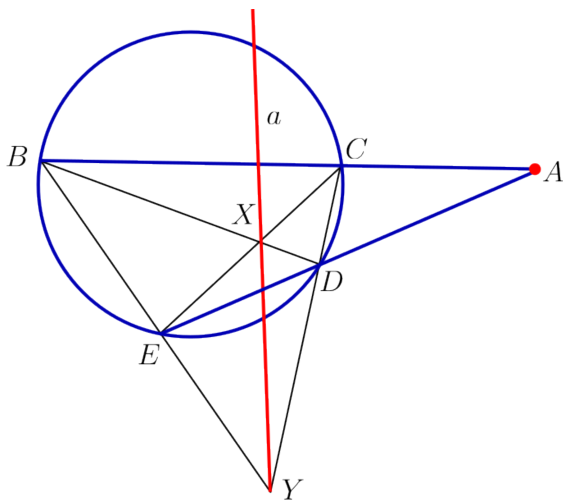


Figura 2: Transformada polar

Teorema. La polar a de un polo A no depende de la elección de las secantes que pasan por A. (*Hint: Usa el teorema de Pascal que aparece en la sección de problemas.*)

Ejercicio 4. Considera una circunferencia Ω y cuatro puntos A, B, C, D sobre ella. Considera las seis rectas que determinan con sus intersecciones. Construye las polares de los puntos de intersección entre estas rectas. ¿Notas algo especial?

Ejercicio 5. Dibuja puntos A, B, C, rectas $l_1 = BC$, $l_2 = CA$, $l_3 = AB$ y una recta l_4 que pasa por A. ¿Cómo se ve el dual de este dibujo?

La transformada polar es una herramienta poderosa para resolver problemas. Al aplicar la transformada polar a un diagrama respecto a alguna circunferencia fija, obtenemos un diagrama dual al inicial. Así, si demostramos el resultado dual, obtendremos la solución a nuestro problema inicial.

Problemas

A continuación encontrarás algunos problemas que te harán poner en práctica lo que hemos hablado hoy. Los problemas no necesariamente están ordenados por dificultad.

1. Demuestra la identidad:
$$\text{si} \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \quad \text{entonces} \quad \frac{x-a}{y-b} = \frac{x}{y}.$$

2. Usando el teorema de Ceva demuestra que:

   a) Las medianas de un triángulo coinciden en un punto.

   b) Las bisectrices de un triángulo coinciden en un punto.

   c) Las alturas de un triángulo coinciden en un punto.

3. Demuestra que el teorema de Ceva es cierto si el teorema de Menelao lo es.

4. Sea $ABCD$ un cuadrado con E y F los puntos medios de AD y DC, respectivamente. Sean X e Y las intersecciones de EC con BD y BF, respectivamente.

   (I) Demuestra que A, X y F son colineales.

   (II) Si Área[ABCD] $= 120$, encuentra el área del cuadrilátero $DXYF$.

5. Sea Ω una circunferencia con centro O en el plano y sea A un polo con polar a. Demuestra que

   a) Si b es una línea que pasa por a A, entonces el polo B de b está en a.

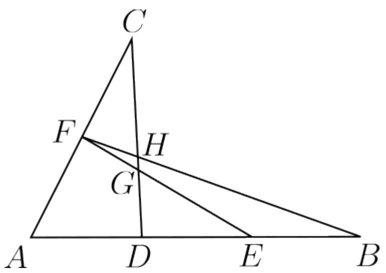
   b) $AO \perp a$ y $BO \perp b$. En general, demuestra que la polar es perpendicular a la recta que une a un polo y el centro de la circunferencia.

   c) El ángulo formado por a y b es igual al ángulo $\angle AOB$.

   d) Si A, B y O están alineados, entonces a y b son paralelas.

   e) P, Q, R están alineados si y sólo si sus polos p, q, r son concurrentes.

6. Dados tres puntos no colineales A, B, C, el segmento $\overline{AB}$ es trisecado por puntos D y E, y F es el punto medio de AC. Los segmentos DF y BF intersecan a CE en G y H, respectivamente. Si $[DEG] = 18$, calcula $[FGH]$.



7. Sea ABC un triángulo y D el pie de la A-altitud. Sean E, F puntos en AC, AB tales que las líneas BE, CF y AD son concurrentes. Prueba que $\angle EDA \cong \angle FDA$.

8. Sea UV un diámetro de un semicírculo. Sean P, Q puntos en el semicírculo con $UP < UQ$. Las tangentes al semicirculo en P y Q se intersecan en R. Si $S = UP = VQ$, prueba que $RS \perp UV$.

9. Un cuadrilátero $ABCD$ tiene una circunferencia inscrita Ω con lados AB, BC, CD, DA tangentes a Ω en G, H, K, L, respectivamente. Sea $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$ y $P = GK \cap HL$. Si O es el centro de Ω, prueba que OP es perpendicular a EF.

10. (Olimpiada China de Matemáticas 1997) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea $P = AB \cap CD$ y $Q = AD \cap BC$. Las tangentes desde Q tocan el circuncírculo de $ABCD$ en E y F. Prueba que P, E, F son colineales.

11. (Olimpiada Austria-Polonia de Matemáticas 1998) Sean A, B, C, D, E, F puntos distintos sobre una circunferencia tales que las tangentes al círculo en A y D, y las rectas BF y CE son concurrentes. Prueba que las rectas AD, BC, EF son o paralelas o concurrentes

12. Sea Ω una circunferencia con centro O y sea AB un diámetro. Sean l_1 y l_2 rectas tangentes a Ω en A y B, respectivamente. Considera C un punto sobre Ω distinto de A y B, y l_3 una tangente a Ω que pasa por C e interseca a l_1 y l_2 en X e Y, respectivamente. Prueba que el ángulo $\angle XOY$ es recto.

13. Sea ABC un triángulo con incentro I. Sean X, Y y Z puntos sobre BC, CA y AB, respectivamente, tales que $XI \perp AI$, $YI \perp BI$ e $ZI \perp CI$. Prueba que los puntos X, Y, Z son colineales.

14. Sean P un punto en el plano de ΔABC, y γ una recta que pasa por P. Sean A', B', C' los puntos donde las reflexiones de las rectas PA, PB, PC con respecto a γ intersecan a las rectas BC, AC, AB, respectivamente. Prueba que A', B', C' son colineales.

15. Sea ABC un triángulo y sean X, Y, Z puntos en su plano talez que

$$\angle ZAB = \angle YAC, \quad \angle ZBA = \angle XBC \quad \text{and} \quad \angle XCB = \angle YCA.$$

Prueba que las rectas AX, BY, CZ son concurrentes.

16. Demuestra el **teorema de Pascal**: Dados 6 puntos (que podrían coincidir) A, C, E, B, F, y D etiquetados en ese orden alrededor de una circunferencia, las intersecciones de $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = AF \cap CD$ son colineales.

17. Demuestra el teorema de Brianchon: Si $ABCDEF$ es un hexágono formado por seis rectas tangentes a una circunferencia, entonces las diagonales uniendo puntos vértices opuestos son concurrentes.

Hint: DUALIDAD! Asumiendo como cierto el teorema de Pascal.