Apuntes de preparación para Olimpíada Matemática

José Ángel Gálvez Gómez

1 Desigualdades

1.1 Orden en $\mathbb{R}$ y desigualdad media AG

Propiedades del orden en $\mathbb{R}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{R}$.

ii) $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc, \forall c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) $|a + b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

iv) $||a| - |b|| \leq |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

v) $|ab| = |a||b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Definición. La media aritmética de $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ es $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ y la media geométrica de $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es $\sqrt[n]{a_1...a_n}$.

Desigualdad AG (básica). $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ con $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Desigualdad AG. $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1...a_n}$ con $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Ejercicio 1. Probar que si $a, b > 0$ entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Ejercicio 2. Probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Ejercicio 3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$, probar que

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3.$$

Ejercicio 4. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales positivos tales que $a_1...a_n = 1$, probar que

$$(1 + a_1)...(1 + a_n) \geq 2^n.$$

Ejercicio 5. Sean a, b, c números reales positivos, probar que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Ejercicio 6. Sean a, b, c números positivos, demostrar que

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Ejercicio 7. Sean a, b, c números positivos tales que $abc = 1$, demostrar que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Desigualdad AG Ponderada. Sean $a_1, ..., a_n, w_1, ..., w_n$ números reales positivos. Entonces

$$\frac{w_1 a_1 + ... + w_n a_n}{w_1 + ... + w_n} \geq (a_1^{w_1} ... a_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + ... + w_n}}.$$

Ejercicio 8. Sean a, b, c números reales positivos tales que $a + b + c = 3$ entonces

$$a^b b^c c^a \leq 1.$$

1.2 Desigualdad de Jensen, desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad de Nesbitt y desigualdad de reordenamiento

Desigualdad de Jensen. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Ejercicio 9. Probar que

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^{a+b+c}$$

para cualesquiera $a, b, c > 0$.

(*) Ejercicio 10. Sean $\theta_1, ..., \theta_n \in [0, \pi]$ tales que $\theta_1 + ... + \theta_n = \pi$. Determinar el valor máximo de

$$\sin^2(\theta_1) + ... + \sin^2(\theta_n).$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ números reales. Entonces

$$(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + ... + a_n b_n)^2.$$

Ejercicio 11. Demostrar que

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Ejercicio 12. Sean $a_1, ..., a_n$ números reales positivos, probar que

$$(a_1 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Ejercicio 13. (Desigualdad de Nesbitt) Sean a, b, c números reales positivos. Probar que

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

Desigualdad de reordenamiento. Sean $x_1 < x_2 < ... < x_n$ y $y_1 < ... < y_n$ números reales positivos entonces

$$x_n y_n + ... + x_1 y_1 \geq x_n y_{\sigma(n)} + ... + x_1 y_{\sigma(1)} \geq x_n y_1 + ... + x_1 y_n.$$

(*) Ejercicio 14. Sean a, b, c, d números positivos tales que $a + b + c + d = 4$. Probar que

$$\frac{4}{abcd} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Ejercicio 15. Sean $a, b, c > 0$. Demostrar que

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$