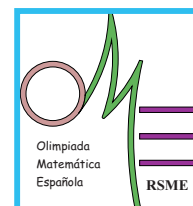




LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024



Mañana del viernes 19 de enero de 2024

Primera sesión

Problema 1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots 11$$

sea divisible por 45.

Problema 2.

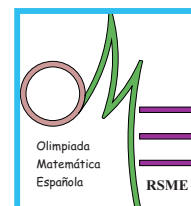
- Dado un cuadrado $ABCD$ se traza una circunferencia de centro C y dos tangentes a la circunferencia desde B : BE y desde D : DF . Sabiendo que $\angle CBE = 20,24^\circ$, si EF corta a CD en G , calcular el ángulo $\angle CGF$.
- En el interior de una circunferencia de centro A se trazan dos circunferencias tangentes entre sí y tangentes a la inicial, de centros B y C . Sea E el punto en el que se tocan las circunferencias de centros B y C . Llamemos D y F a los puntos en los que la circunferencia de centro A toca a las circunferencias de centro B y C , respectivamente. DE interseca a la circunferencia de centro A en G . FE interseca a la circunferencia de centro A en H . Demostrar que HG es un diámetro de la circunferencia de centro A .

Problema 3. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 5 y sean a y b son números reales diferentes de 0. Supongamos que el resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax + b$ es igual al resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax^2 + b$. Determinar el valor de $a + b$.



LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024



Tarde del viernes 19 de enero de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD . La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F . Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Problema 5. Se sabe que todo entero positivo se puede expresar de modo único como suma de potencias distintas de 2. Sea n un entero mayor que 2, y $N = n^2 - 1$. Demostrar que al expresar N como suma de potencias distintas de 2, siempre sucede que:

- O bien aparecen 3 potencias de 2 consecutivas en esa expresión;
- O bien faltan 3 potencias de 2 consecutivas.

Problema 6. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y .
- X e Y son amigos.