Sesiones de preparación de las Olimpiadas Matemáticas

SESIÓN 3.

PONENTE: Profesor D. Miguel Ángel Gómez Lozano E-mail: miggl@uma.es

FECHA: 1 de diciembre de 2018.

LUGAR: Escuela de Ingenierías. UMA.

PARTICIPANTES:

	4º ESO	1º BACH	2º BACH	**Total:**
Chicas				**10**
Chicos				**17**
Total:				**27**

PROBLEMAS PROPUESTOS:

PROBLEMA 1:

Es martes 13 y la luna está llena. ¿Cuánto falta para que sea viernes y luna nueva?
Nota: Suponemos los ciclos lunares de 30 días.

PROBLEMA 2:

Cierto planeta imaginario de nuestro universo disfruta de tres lunas.
La primera de ellas, eclipsa a su sol cada 17 días y la última vez que lo hizo fue hace 5 días. La segunda, lo hace cada 101 días y su último eclipse lo hizo hace 75 días. Por último, la tercera, cada 50 días, se prevé que eclipse a su sol dentro de 7 días.
Los habitantes de este planeta hacen una gran fiesta cada vez que coinciden tres eclipses en tres días consecutivos.

a) ¿Puedes indicar algún momento en que ocurra esto?
b) ¿La gran fiesta es periódica en el tiempo?

Algunos resultados que nos ayudarán a resolver estos dos problemas:

RELACIÓN DE CONGRUENCIA

Definición: Sea n natural, a, b enteros. Diremos que **a** es congruente con **b** módulo n si y solo si a – b es múltiplo de n

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \leftrightarrow \quad a - b \text{ es múltiplo de } n$$

Así, tenemos que $0 \equiv 2 \equiv 4 \equiv \ldots \equiv 2n \pmod{2}$, lo llamamos $\bar{0}$ (los pares)

Mientras que los impares los representamos como $\bar{1}$ en módulo 2.

Propiedades de las congruencias:

P1: Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c \equiv d \pmod{n}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{n}$

P2: Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c \equiv d \pmod{n}$, entonces $ac \equiv bd \pmod{n}$

P3: $a \equiv b \pmod{n} \quad \leftrightarrow \quad b \equiv a \pmod{n}$

Y como consecuencia de P2, tenemos también:

P4: Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

CUESTIÓN 1:

Dado un número natural a, ¿cuál es el más pequeño r tal que $a \equiv r \pmod{n}$?

Será el resto de dividir a entre n:

$a = c\,n + r$ con $r < n$

$a - r = c\,n$, por lo que $a \equiv r \pmod{n}$ y $r < n$

CUESTIÓN 2:

¿Cuál es el resto de dividir 2348^{5679} entre 7?

Teorema Pequeño de Fermat

Si MCD (a, p) = 1 (es decir, a y p primos relativos), entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Ejemplo: $2^4 \equiv 1 \pmod 5$

Volviendo a la pregunta de antes:

2348 no es múltiplo de 7, por lo que MCD (2348, 7) = 1

$2348^6 \equiv 1 \pmod 7$, así que partimos el exponente en paquetes de 6,

5679 = 6 * 946 + 3

$2348^{5679} = 2348^{6*946+3} \equiv 1^{946} * 2348^3 \equiv 3^3$ (Mod 7) $\equiv 6$ (mod 7)

(2348: 7 tiene resto 3)

Luego el resto buscado es 6.

Usando el Teorema de Euler (generaliza lo anterior) podríamos averiguar:

CUESTIÓN 3:

¿Cuáles son las dos últimas cifras de 2348^{5679}? bastaría averiguar r tal que

$2348^{5679} \equiv r \pmod{100}$ de manera más sencilla.

CUESTIÓN 4:

Si es martes 13, ¿qué día de la semana será dentro de 50 días?

Hoy es Martes ≡ 2 (mod 7)

2 + 50 = 52 ≡ 3 (mod 7) ≡ miércoles (mod 7)

Dentro de 50 días será miércoles.

ECUACIONES CON CONGRUENCIAS

- $2X \equiv 3 \pmod 5$ — $X \equiv 4 \pmod 5$, una solución
- $2X \equiv 4 \pmod 6$ — $X \equiv 2 \pmod 6$, o $X \equiv 5 \pmod 6$, dos soluciones.
- $15X \equiv 6 \pmod{21}$ — tres soluciones.
- $2X \equiv 3 \pmod 4$ — no existen soluciones. (ahora las vemos)

TEOREMA

Sean n natural, a y b enteros.

La ecuación $aX \equiv$ **b** (mod **n**) tiene solución si y solo si mcd (**a, n**) divide a **b**

Además, el número de soluciones es el mcd (**a, n**)

Si mcd (**a, r**) = **d**, entonces existen r, s enteros tal que **r a + s b = d**

Ejemplo:

- 15X ≡ 6 (mod 21) tiene tres soluciones, ya que mcd (15, 21) = 3

  Usamos el **<u>Algoritmo de Euclides</u>** para calcular el mcd:

  21 = 1*15 + 6 (dividimos el mayor entre el menor)
  15 = 2* 6 + **3** (dividimos el menor entre el resto de lo anterior)
  6 = 2* 3 + 0 (dividimos el primer resto entre el segundo)

  El resto anterior al 0 es el mcd.

  Otro ejemplo, ¿mcd (97, 26)?

  97 = 3*26 + 19
  26 = 1*19 + 7
  19 = 2*7 + 5
  7 = 1*5 + 2
  5 = 2*2 + **1** mcd (97, 26) = 1
  2 = 1*2 + 0

  Seguimos con la resolución de la ecuación 15X ≡ 6 (mod 21):

  21 = 1*15 + 6 i)
  15 = 2* 6 + **3** ii)
  6 = 2* 3 + 0

  Despejando el mcd en ii):
  3 = 15 – 2*6 y ahora 6 en i)
  = 15 – 2(21 – 15)
  = – 2*21 + 3*15. Luego r = – 2, s = 3 (r, s tal que **r a + s b = d**)

  ¿Solución de 15X ≡ 6 (mod 21)?

  3 = – 2*21 + 3*15
  Tomando congruencia mod 21,
  3 ≡ – 2*0 + 3*15 = 3*15 Luego X ≡ 3 (mod 21) y como 10=3+7, 17 = 10+7

  Las soluciones son X ≡ 3 (mod 21) , X ≡10 (mod 21) X ≡ 17 (mod 21)

Ejemplo2:

- 60X ≡ 12 (mod 8) (equivalente a 15X ≡ 3 (mod 2) con sol X ≡1 (mod 2))

  Mcd (60, 12) = 4
  60 = 7*8+4 , 8=2*4+0 // 4=60 – 7*8, r = 1, s= -7 // 4≡ 60 – 7*8 ≡60 (mod8)

$12 \equiv 3*60$. Las soluciones son $X \equiv 3 \pmod 8$, $X \equiv 5 \pmod 8$, $X \equiv 7 \pmod 8$ y $X \equiv 9 \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8$

PROBLEMA 1:

Es martes 13 y la luna está llena. ¿Cuánto falta para que sea viernes y luna nueva?

Nota: Suponemos los ciclos lunares de 30 días.

Resolución.

Planteamos el siguiente sistema:

$X \equiv 3 \pmod 7$ de martes a viernes van 3 días
$X \equiv 15 \pmod{30}$ de luna llena a nueva van 15 días

(Nota: Con teorema del resto chino se resolvería muy rápidamente)

$X = 15 + 30k$
$15 + 30k \equiv 3 \pmod 7$
$+ 30k \equiv - 12 \pmod 7 \equiv - 5 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$
$2k \equiv 2 \pmod 7$
$k \equiv 1 \pmod 7$
$k = 1 + 7s$

$X = 15 + 30 (1 + 7s) = 45 + 210$ s es la solución
$X = 45 + 210$ s es la solución

Solución: Dentro de 45 días será viernes y luna nueva. Y esto se repetirá cada 210 días.

PROBLEMA 2:

Cierto planeta imaginario de nuestro universo disfruta de tres lunas.

La primera de ellas, eclipsa a su sol cada 17 días y la última vez que lo hizo fue hace 5 días. La segunda, lo hace cada 101 días y su último eclipse lo hizo hace 75 días. Por último, la tercera, cada 50 días, se prevé que eclipse a su sol dentro de 7 días.

Los habitantes de este planeta hacen una gran fiesta cada vez que coinciden tres eclipses en tres días consecutivos.

c) ¿Puedes indicar algún momento en que ocurra esto?
d) ¿La gran fiesta es periódica en el tiempo?

Resolución.

Planteamos el siguiente sistema (de las 6 opciones posibles):

$X \equiv 12 \pmod{17}$
$X + 1 \equiv 26 \pmod{101}$
$X + 2 \equiv 7 \pmod{50}$

Empezamos por el módulo mayor.
$X + 1 \equiv 26 \pmod{101}$

$X \equiv 25 \pmod{101}$ // $X = 25 + 101\,k$

$X + 2 \equiv 7 \pmod{50}$

$25 + 101\,k + 2 \equiv 7 \pmod{50}$
$101\,k \equiv -20 \pmod{50} \equiv 30 \pmod{50}$
$k \equiv 30 \pmod{50}$ // $k = 30 + 50\,s$

$X = 25 + 101\,k = 25 + 101\,(30 + 50\,s) = 3055 + 5050\,s$

$X \equiv 12 \pmod{17}$
$3055 + 5050\,s \equiv 12 \pmod{17}$ 3055:17 tiene resto 12
$12 + 1\,s \equiv 12 \pmod{17}$ 5050:17 tiene resto 1
$s \equiv 0 \pmod{17}$
$s = 0 + 17\,t$

$3055 + 5050 * (17\,t) = 3055 + 85850\,t$

Solución: Habrá una fiesta dentro de 3055 días y esa combinación se repetirá cada 85850 días.

Son 6 los sistemas de ecuaciones posibles. Cada uno con su ciclo. Como 85850 no es múltiplo de 6, no pueden "equidistribuirse" en ese periodo.

CUESTIÓN 3':

¿Cuáles son las dos últimas cifras de 2347^{1579}?

<u>FUNCIÓN DE EULER</u>

Definimos la función entre naturales $\varphi : \mathbb{N} \quad \mathbb{N}$ (se lee fi)

$$\varphi(n) = \#\{a \in \{1, 2, \ldots, n\} \,/\, \mathrm{mcd}(a, n) = 1\}$$

(el número de primos con n, menores que n, que tenga n)

Ejemplos: $\varphi(8) = 4$, pues 1, 3, 5, 7 son primos con 8

$\varphi(10) = 4$, pues 1, 3, 7, 9 son primos con 10.

Si p es primo entonces… $\varphi(p) = p - 1$

Si un número está factorizado, es fácil obtener su φ:

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

donde los p_j son números primos distintos, entonces

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1 - 1} \cdots (p_r - 1)p_r^{k_r - 1}.$$

Esta última fórmula es un producto de Euler y a menudo se escribe como

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

donde los p son los distintos primos que dividen a n.

(wikipedia)

Ejemplo: $100 = 2^2 * 5^2$, $\varphi(100) = 100 (1-1/2) (1-1/5) = 40$

Teorema de Euler

Si mcd (a, n) = 1, entonces $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Vamos ya con la cuestión 3':

$2347^{1579} \equiv r \pmod{100}$, busquemos r.

Usando el teorema de Euler, sabiendo que 2347 es primo con 100

y que 1547=40*39 + 19:

$2347^{1579} = 2347^{40*39+19} = (2347^{40})^{39} * 2347^{19} \equiv 1^{39} * 2347^{19} \equiv 47^{19}$

$= 47^{2*9} * 47 = 2209^9 * 47 \equiv 09^9 * 47 = 09^{3*3} * 47 = 729^3 * 47 \equiv$

$29^3 * 47 = 1146283 \equiv 83 \pmod{100}$

Luego 2347^{1579} termina en 83