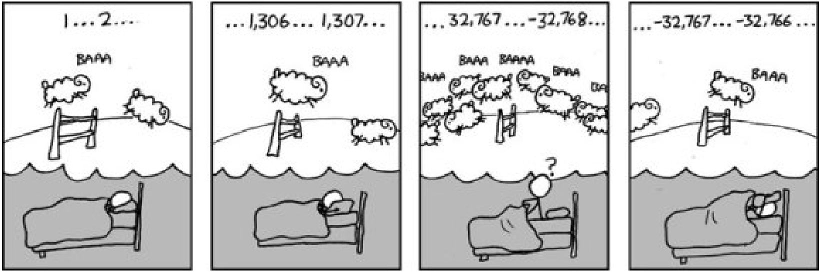
Problemas de combinatoria

TIMM 23-24



xkcd.com/571

¿Cómo contar un rebaño de ovejas?

museovirtual.csic.es

Podemos señalar a cada oveja con el dedo para contarlas.

O podemos identificar cada oveja con otro objeto (una piedrecita, una muesca en un palo,...) que podremos contar fácilmente más tarde.

Esto es establecer una biyección entre el conjunto de las ovejas y otro conjunto, que tendrá el mismo cardinal.

IDEA: Buscar una representación adecuada de los objetos que queremos contar.

Ejemplo 1

¿Cuántos subconjuntos tiene $X = \{1, 2, \ldots, 58\}$?

Ejemplo 1

¿Cuántos subconjuntos tiene $X = \{1, 2, \ldots, 58\}$?

¿Y si representamos cada subconjunto A de X con la lista de ceros y unos que tiene un 1 en la n-ésima posición si n es un elemento de A y un 0 en caso contrario?

Entonces habrá tantos subconjuntos de X como listas de ceros y unos de longitud 58. Eso sí sabemos contarlo fácilmente:

$$2^{58}$$

Ejemplo 2

¿Cuántos divisores tiene 2000?

Ejemplo 2

¿Cuántos divisores tiene 2000?

$$2000 = 2^4 5^3$$

y sus divisores son todos los números de la forma

$$2^a 3^b$$

con $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 3$.

Entonces el número de divisores es el número de pares (a, b) con $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 3$, es decir,

$$5 \times 4 = 20.$$

¿Cómo contar un rebaño de ovejas?

Podemos hacer grupos de ovejas, contar cada grupo y luego sumar los resultados.

Esto en la jerga combinatoria se llama *Regla de la suma:* el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos es la suma de los cardinales.

IDEA: Agrupar los objetos que queremos contar en conjuntos más pequeños y fáciles de contar.

Ejemplo 3

Tenemos un alfabeto con 10 consonantes y 5 vocales. ¿Cuántas palabras de 5 letras que no tengan 2 vocales seguidas ni 3 consonantes seguidas se pueden formar?

Ejemplo 3

Tenemos un alfabeto con 10 consonantes y 5 vocales. ¿Cuántas palabras de 5 letras que no tengan 2 vocales seguidas ni 3 consonantes seguidas se pueden formar?

Vamos a agrupar las palabras de cinco letras por tipos, según la posición que ocupan vocales y consonantes en ellas:

$$VCVCV, VCVCC, VCCVC, CVCVC, CVCCV, CCVCC, CCVCV$$

Es faćil contar cuántas palabras hay en cada grupo y el número total de palabras será la suma del cardinal de cada grupo:

$$5^3 10^2 + 5^2 10^3 + 5^2 10^3 + 5^2 10^3 + 5^2 10^3 + 5\ 10^4 + 5^2 10^3$$

¿Cómo contar un rebaño de ovejas?

Cuando sepamos cuántas ovejas tiene nuestro rebaño y alguien nos pregunte cuántas son blancas, quizá prefiramos contar las negras.

IDEA: A veces es mejor contar los objetos que no nos interesan y restarlos del total.

Ejemplo 4

¿De cuántas formas se pueden alinear 6 personas para hacerse una foto si hay dos de ellas que no quieren sentarse una al lado de la otra?

Ejemplo 4

¿De cuántas formas se pueden alinear 6 personas para hacerse una foto si hay dos de ellas que no quieren sentarse una al lado de la otra?

Vamos a llamar A, B, C, D, E, F a las 6 personas, siendo A, B las que no quieren sentarse juntas.

Hay 6! formas de colocar a las 6 personas sin restricciones.

Ejemplo 4

¿De cuántas formas se pueden alinear 6 personas para hacerse una foto si hay dos de ellas que no quieren sentarse una al lado de la otra?

Vamos a llamar A, B, C, D, E, F a las 6 personas, siendo A, B las que no quieren sentarse juntas.

Hay 6! formas de colocar a las 6 personas sin restricciones.

Si A, B se sentaran juntos, podrían hacerlo en este orden, AB, o en este otro, BA. En el primer caso, el número de formas de colocar a las 6 personas sería el número de formas de ordenar las fichas AB, C, D, E, F, luego 5!. El segundo caso es igual, con las fichas BA, C, D, E, F. El número total de formas de colocar a las 6 personas con A, B juntos es entonces $2 \times 5!$. Y el número que nos pide el problema es

$$6! - 2 \times 5! = 4 \times 5!$$

¿Cómo contar un rebaño de ovejas?

Cuando las ovejas están apiñadas es difícil distinguir todas las cabezas: ¿qué tal si contamos patas? Pero cuidado, ¿estamos seguros de que todas las ovejas tienen 4 patas?

Esto se llama *Principio del pastor.*

IDEA 1: A veces es más fácil contar cada objeto más de una vez y luego dividir.

IDEA 2: Pero cuidado, debemos estar seguros de que hemos contado todos los objetos el mismo número de veces.

Ejemplo 5

¿Cuántas aristas y cuántos vértices tiene un dodecaedro?

Ejemplo 5

¿Cuántas aristas y cuántos vértices tiene un dodecaedro?

El dodecaedro es el poliedro regular de 12 caras en forma de pentágono regular.

Cada cara tiene 5 aristas.

El producto del número de caras por el número de aristas de una cara es 12×5.

Ahora podríamos pensar que ya hemos contado las aristas, pero hay que tener en cuenta que hemos contado cada arista 2 veces, pues una arista pertenece exactamente a dos caras. Así que tenemos que dividir por 2:

$$6 \times 5 = 30$$

es el número de aristas del dodecaedro. ¿Cuántos vértices hay?

Ejemplo 6

¿Cuántos subconjuntos de 22 elementos tiene $X = \{1, 2, \ldots, 58\}$?

Ejemplo 6

¿Cuántos subconjuntos de 22 elementos tiene $X = \{1, 2, \ldots, 58\}$?

Nos resulta más fácil contar las formas de extraer 22 elementos distintos de X en orden:

$$58 \times 21 \times 20 \times \cdots \times 37.$$

Pero así estamos contando cada subconjunto de 22 elementos de X tantas veces como formas hay de reordenar sus elementos, que son 22!. Así que el número total del subconjuntos de cardinal 22 es

$$\frac{58 \times 21 \times 20 \times \cdots \times 37}{22!}.$$

Ejemplo 7

Si varios pastores cuidan de un mismo rebaño de ovejas, podemos preguntarnos de cuántas formas distintas pueden repartirse hoy el rebaño (cuántas ovejas pastorea cada uno) incluyendo la posibilidad de que algún pastor se quede hoy en casa.

Ejemplo 7

Si varios pastores cuidan de un mismo rebaño de ovejas, podemos preguntarnos de cuántas formas distintas pueden repartirse hoy el rebaño (cuántas ovejas pastorea cada uno) incluyendo la posibilidad de que algún pastor se quede hoy en casa.

Pongamos que hay 100 ovejas y 3 pastores A, B y C. Una forma de representar el problema es imaginando que a las ovejas que pastorea A les colocamos un lazo con una letra A, le ponemos una B a las del segundo pastor y una C a las del tercero.
Así tendríamos que contar todas las selecciones de 100 lazos con las letras A, B, C.

Ejemplo 7

Si varios pastores cuidan de un mismo rebaño de ovejas, podemos preguntarnos de cuántas formas distintas pueden repartirse hoy el rebaño (cuántas ovejas pastorea cada uno) incluyendo la posibilidad de que algún pastor se quede hoy en casa.

Pongamos que hay 100 ovejas y 3 pastores A, B y C. Una forma de representar el problema es imaginando que a las ovejas que pastorea A les colocamos un lazo con una letra A, le ponemos una B a las del segundo pastor y una C a las del tercero.
Así tendríamos que contar todas las selecciones de 100 lazos con las letras A, B, C.

Como antes, es muy fácil contarlas si están ordenadas, pero no lo están. ¿Podemos usar otra vez el principio del pastor? Pues es que la selección con 100 A solo se puede ordenar de una forma, mientras que la selección con 99 A y una B se ordena de 100 formas distintas...

¿Cómo repartir un rebaño de ovejas?

Si varios pastores cuidan de un mismo rebaño de ovejas, podemos preguntarnos de cuántas formas distintas pueden repartirse hoy el rebaño (cuántas ovejas pastorea cada uno) incluyendo la posibilidad de que algún pastor se quede hoy en casa.

IDEA: A veces es muy útil identificar los objetos a contar con distribuciones de bolas en cajas.

Ejemplo 8

Tres pastores de una misma familia se reparten el rebaño cada día. ¿De cuántas formas pueden hacerlo si tenemos en cuenta que alguno de los pastores puede no ocuparse de ninguna oveja?

Ejemplo 8

Tres pastores de una misma familia se reparten el rebaño cada día. ¿De cuántas formas pueden hacerlo si tenemos en cuenta que alguno de los pastores puede no ocuparse de ninguna oveja?

Pensemos que cada pastor tiene una caja

y que en cada caja metemos las ovejas que va a cuidar el pastor correspondiente. En la pizarra dibujamos cajas y ovejas así:

$$OOOOOO...OOOOOO|OOOOO...OOOO|OOOOOOO....OOOOO$$

¿Sabemos contar ya las formas de distribuir las ovejas entre los 3 pastores?

A continuación proponemos una lista de problemas de combinatoria extraídos del libro "102 combinatorial problems" de T. Andreescu y Z. Feng.

Mantenemos los enunciados en inglés: si hay alguna duda con el idioma podemos resolverla durante la sesión y después podéis seguir utilizando el libro en casa.

Si lo hacéis, no dejés de leer la introducción: tiene recomendaciones interesantes.

El libro tiene soluciones para todos los problemas, pero si se os ocurre una solución diferente y tenéis dudas sobre su validez, podéis enviarme a mí, Mariángeles, un mensaje a gomezma@uma.es. Si no tenéis respuesta pronto, mirad en vuestra carpeta de spam, que a veces mis mensajes se cuelan ahí.

Problema 1

Mr. and Mrs. Zeta want to name their baby Zeta so that its monogram (first, middle, and last initials) will be in alphabetical order with no letter repeated. How many such monograms are possible?

Problema 2

The student locker numbers at Olympic High are numbered consecutively beginning with locker number 1. The plastic digits used to number the lockers cost two cents apiece. Thus, it costs two cents to label locker number 9 and four cents to label locker number 10. If it costs 137.94 to label all the lockers, how many lockers are there at the school?

Problema 3

At the end of a professional bowling tournament, the top 5 bowlers have a playoff. First #5 bowls #4. The loser receives 5th prize and the winner bowls #3 in another game. The loser of this game receives 4th prize and the winner bowls #2. The loser of this game receives 3rd prize and the winner bowls #1. The winner of this game gets 1st prize and the loser gets 2nd prize. In how many orders can bowlers #1 through #5 receive the prizes?

Problema 4

Twenty five boys and twenty five girls sit around a table. Prove that it is always possible to find a person both of whose neighbors are girls.

Problema 5

A spider has one sock and one shoe for each of its eight legs. In how many different orders can the spider put on its socks and shoes, assuming that, on each leg, the sock must be put on before the shoe?

Problema 6

Given a rational number, write it as a fraction in lowest terms and calculate the product of the resulting numerator and denominator. For how many rational numbers between 0 and 1 will $20!$ be the resulting product?

Problema 7

Find the number of ordered quadruples (x_1, x_2, x_3, x_4) of positive odd integers that satisfy $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$.

Problema 8

Determine the number of ways to choose 5 numbers from the first 18 natural numbers such that any two chosen numbers differ by at least 2.

Problema 9

A child has a set of 96 distinct blocks. Each block is one of 2 materials (plastic, wood), 3 sizes (small, medium, large), 4 colors (blue, green, red, yellow), and 4 shapes (circle, hexagon, square, triangle). How many blocks in the set differ from the 'plastic medium red circle' in exactly 2 ways? (The 'wood medium red square' is such a block)

Problema 10

A drawer in a darkened room contains 100 red socks, 80 green socks, 60 blue socks and 40 black socks. A youngster selects socks one at a time from the drawer but is unable to see the color of the socks drawn. What is the smallest number of socks that must be selected to guarantee that the selection contains at least 10 pairs? (A pair of socks is two socks of the same color. No sock may be counted in more than one pair.)