Apuntes de preparación para Olimpíada Matemática
Sesión 20 de octubre

José Ángel Gálvez Gómez

Contents

1 Notaciones Básicas

Antes de comenzar es importante comprender el significado de los símbolos matemáticos y notaciones universales que se van a utilizar durante el desarrollo de las demostraciones.

Estos son los principales:

- Usualmente los números naturales o enteros se denotan con letras latinas minúsculas

$$n, m, r, s, a, b, c...$$

Cuando en particular queremos hablar de un número primo generalmente se usarán letras como

$$p, q...$$

Cuando queremos hacer referencia a números reales usaremos

$$a, b, c, s, t, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma...$$

Cuando utilicemos funciones escribiremos

$$f, g, h, F, G, H...$$

Cuando hablemos de conjuntos usaremos letras mayúsculas como

$$A, B, C, D, X, Y, Z...$$

Cuando queramos describir los elementos de un conjunto lo indicaremos entre llaves, y en el interior escribiremos o bien explícitamente todos los elementos o bien la forma que tienen los elementos.

$$A = \{a, b, \pi\}$$

$$B = \{n, \text{ donde } n \text{ es un número natural tal que la su última cifra en base 10 es 3 }\}$$

$$S^1 = \{(x, y), \text{ tales que } x, y \text{ son reales y } x^2 + y^2 = 1\}$$

Algunos conjuntos conocidos son el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

El conjunto de los números naturales comenzando en 0

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$$

o comenzando en 1

$$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$$

para evitar confusión se suele escribir explícitamente "números enteros positivos" si queremos comenzar en 1 o "números enteros no negativos" si queremos empezar en 0. También es posible encontrar notaciones como $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para comenzar en 0, $\mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{N}^+$ para comenzar en 1.
El conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \{a/b \text{ tales que } a, b \text{ son enteros y } b \neq 0\}$$

El conjunto de los números reales

$$\mathbb{R}$$

El conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + ib, \text{ donde } a, b \text{ son números reales}\}$$

Si en alguna situación necesitamos utilizar muchas letras para representar un tipo de número usaremos una numeración en la parte inferior derecha (subíndice): Sean $p_1, p_2, ..., p_n$ números

primos.
• Utilizaremos el símbolo $\in$ y se leerá como "pertenece a" cuando queremos indicar que un elemento pertenece a un conjunto: $-5 \in \mathbb{Z}, \pi \in \mathbb{R}$. Utilizaremos el símbolo $\notin$ cuando queremos indicar que un elemento no pertenece a un conjunto:$-5 \notin \mathbb{N}, \pi \notin \mathbb{Q}$.
• Utilizaremos el símbolo $\subset$ y se leerá como "es subconjunto de" cuando queremos indicar que un conjunto es un subconjunto de otro, es decir, $A \subset B$ si para todo elemento $a \in A$ se tiene que $a \in B$.
• Utilizaremos el símbolo $|$ o el símbolo : y se leerá como "tal que". $|$ a veces también puede significar "divide a" o si se escribe$\not|$ "no divide a"

$$8 \mid 16 \quad n \mid n^2 \quad n \not| \; n+1$$

• Utilizaremos el símbolo $\cap$ y se leerá como "intersección", cuando tenemos dos conjuntos A, B y queremos indicar el conjunto de todos sus elementos comunes, es decir, $A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ y } c \in B\}$.
• Utilizaremos el símbolo $\cup$ y se leerá como "unión", cuando tenemos dos conjuntos A, B y queremos indicar el conjunto de todos los elementos que están en alguno de los dos conjuntos, es decir, $A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ o } c \in B\}$.
• Utilizaremos el símbolo $-$ y se leerá como "menos", cuando tenemos dos conjuntos A, B y queremos indicar con $A - B$ el conjunto de todos los elementos que están en A pero no están en B, es decir, $A - B = \{c \mid c \in A \text{ o } c \notin B\}$.
• Utilizaremos el símbolo $\Rightarrow$ y se leerá como "implica que" cuando una proposición implica otra.

$$a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ o } a = -1$$

• Utilizaremos el símbolo $\Leftrightarrow$ y se leerá como "si y solo si" (o de forma abreviada sii) cuando una proposición implica otra proposición y viceversa. En tal caso se dice que las dos proposiciones son equivalentes, es decir, si alguna es cierta la otra también es cierta y si alguna es falsa la otra también es falsa.

$$3x + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

$$a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ o } a = -1$$

• Utilizaremos el símbolo $\forall$ y se leerá como "para todo".

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ se tiene que } \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

• Utilizaremos el símbolo $\exists$ y se leerá como "existe" y utilizaremos el símbolo $\exists!$ y se leerá como "existe un único".

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \mid xn > 1$$

• Utilizaremos el símbolo $\sum$ para indicar una suma de varios términos. Usualmente en la parte inferior se indicará donde comienza la variable y en la parte superior donde termina.

$$\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

También es posible encontrar notaciones usando conjuntos. Por ejemplo si $I = \{4, 8, 9\}$

$$\sum_{i \in I} i = 4 + 8 + 9$$

U otras notaciones para usar varias variables como

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i a_j = a_0 a_0 + a_0 a_1 + ... + a_0 a_n + a_1 a_0 + a_1 a_1 + ... + a_1 a_n + ... + a_n a_n$$

• Utilizaremos el símbolo $\prod$ para indicar un producto de varios términos. Usualmente en la parte inferior se indicará donde comienza la variable y en la parte superior donde termina.

$$\prod_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$$

• También será posible encontrar estas notaciones con símbolos como $\cap$ o $\cup$

$$\bigcap_{i=3}^{5} A_i = A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

$$\bigcup_{i=3}^{5} A_i = A_3 \cup A_4 \cup A_5$$

$$\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$$

• Si A, B son dos conjuntos entonces $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ se dirá que es el producto cartesiano de dos conjuntos. A veces encontraremos notaciones como $A^n = \overbrace{A \times ... \times A}^{n \text{ veces}}$.

• Si A es un conjunto entonces se denota por $\#A$, o bien, $|A|$ o bien $\text{card}(A)$ al cardinal del conjunto, es decir, el número de elementos que tiene. Si $A = \{2, 5, 8\}$ entonces $|A| = 3$.

2 Combinatoria y Teoría de Números

2.1 Teoremas sobre los números primos

Teorema de Euclides. Existen infinitos números primos.

Demostración. Supongamos que el conjunto de los números primos es finito. Es claro que este conjunto es no vacío ya que 2 es un ejemplo de número primo. Consideremos ahora P el producto de todos ellos. $P + 1$ es mayor que cualquier número primo y por tanto no puede ser un número primo, es decir, es divisible por $1 < d < P + 1$. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética $d = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, en particular p_1 divide a d y por tanto divide a $P + 1$. Pero P era el producto de todos los primos luego p_1 también divide a P. Si un número divide a otros dos también divide a su diferencia, luego p_1 divide a $P + 1 - P = 1$ implicando que $p_1 = 1$ que no es primo, contradicción que viene de suponer que el conjunto es finito.

Teorema. Existen infinitos números primos de la forma $4k + 3$.

Demostración. Supongamos que el conjunto de los números primos de la forma $4k + 3$ es finito. Entonces, como el este conjunto no es vacío pues 3 es un ejemplo de un número primo de esta forma, podemos considerar P el producto de todos ellos.

• Si $P \equiv 1 \mod 4$ entonces $P + 2 \equiv 3 \mod 4$ es claro que 2 no divide a $P + 2$. Además, ningún primo de la forma $4k + 3$ divide a $P + 2$ pues en caso de hacerlo también dividiría a P lo que implicaría que divide a $P + 2 - P = 2$. Todos los primos que dividen a $P + 2$ son de la forma $4k + 1$ pero el producto de números de la forma $4k + 1$ es de la forma $4k + 1$, sin embargo $P + 2$ es congruente 3 módulo 4, contradicción.

• Si $P \equiv 3 \mod 4$ entonces $P + 4 \equiv 3 \mod 4$ y del mismo modo que antes es claro que 2 no divide a $P + 2$, ningún primo de la forma $4k + 3$ divide a $P + 4$ pues en caso de hacerlo también dividiría a P lo que implicaría que divide a $P + 4 - P = 4$. Todos los primos que dividen a $P + 4$ son de la forma $4k + 1$ pero el producto de números de la forma $4k + 1$ es de la forma $4k + 1$, sin embargo $P + 4$ es congruente 3 módulo 4, contradicción.

Ya no hay más casos pues P es impar al ser producto de primos impares.

2.2 Suma de las primeras n potencias de números naturales

Es conocido por muchos que la suma $1 + 2 + ... + n$ puede ser simplificada a la operación $\frac{n(n+1)}{2}$, que es notablemente más sencilla.
La demostración es sencilla si reorganizamos los términos de la suma:

- Si n es par

$$(1 + n) + (2 + n - 1) + ... + (i + (n + 1 - i)) + ... + (n/2 + (n/2 + 1)) =$$

$$= (n + 1) + (n + 1) + ... + (n + 1) = \frac{n}{2}(n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2}$$

- Si n es impar, entonces $n + 1$ es par y en ese caso

$$1 + 2 + ... + n = 1 + 2 + ... + n + (n + 1) - (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - (n + 1) =$$

$$= \frac{(n + 1)(n) + 2n + 2 - 2n - 2}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Sin embargo, si nos preguntamos que ocurre cuando queremos simplificar $1^2 + 2^2 + ... + n^2$ o, en general, $1^k + 2^k + ... + n^k$ es más complicado encontrar razonamientos similares de "reorganizar y sumar". Aún así, existen formas de encontrar explícitamente la suma $1^k + 2^k + ... + n^k$ en función de un polinomio de grado $k + 1$ que depende de n.

Veamos como se puede deducir la expresión para la suma de la $k-$ésima potencia de los n primeros naturales suponiendo conocida la suma para la potencias menores a k.

La demostración se basará en desarrollo del polinomio

$$(i + 1)^{k+1} = i^{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} i^j$$

de donde se obtiene la diferencia

$$(i + 1)^{k+1} - i^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} i^j$$

Observemos que si hacemos variar i desde 1 hasta n obtenemos la siguiente tabla

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} 1^j$$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} 2^j$$

$$4^{k+1} - 3^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} 3^j$$

$$(n + 1)^{k+1} - n^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} n^j$$

Si efectuamos la suma de todas estas igualdades nos encontraremos con una suma telescópica muy sencilla en la parte izquierda,

$$(n + 1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} 1^j + \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} 2^j + ... + \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k + 1} n^j =$$

Ahora, en la parte derecha iremos sumando primero para $j = 0$ (con lo que se tendría la suma $\binom{0}{k+1}(1+1+...+1)$), luego $j = 1$ (se tendría la suma $\binom{1}{k+1}(1^1+2^1+...+n^1)$),..., hasta $j = k$ (se tendría la suma $\binom{k}{k+1}(1^k+2^k+...+n^k)$).

Finalmente,

$$(n+1)^{k+1}-1 = \binom{0}{k+1}(1+1+...+1)+\binom{1}{k+1}(1^1+2^1+...+n^1)+...+\binom{k}{k+1}(1^k+2^k+...+n^k)$$

Despejando se obtiene que

$$1^k+2^k+...+n^k = (n+1)^{k+1}-1-\binom{0}{k+1}n-\binom{1}{k+1}(1+2+...+n)-...-\binom{k-1}{k+1}(1^{k-1}+2^{k-1}+...+n^{k-1})$$

Fase Nacional 2019, Ourense, Problema 2. Determinar si existe un conjunto finito S formado por números primos positivos de manera que para cada entero $n \geq 2$ el número $2^2 + 3^2 + ... + n^2$ sea múltiplo de algún elemento de S.