LIX Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
10 y 11de marzo de 2023
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Problemas

Problem 1. Tenemos un cubo de lado 3 formado por 27 piezas cbicas de lado 1. Dentro de cada pieza hay una bombilla que puede estar encendida o apagada. Cada vez que se pulsa una pieza (no es posible pulsar la del centro del cubo), cambia el estado de su bombilla y el de las que comparten una cara con la pulsada. Inicialmente, todas las bombillas estn apagadas. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

1. Se puede conseguir que todas las bombillas queden encendidas?
2. Se puede conseguir que queden encendidas todas salvo la del centro del cubo?
3. Se puede conseguir que solo quede encendida la del centro del cubo?

Problem 2. Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con incentro I y ortocentro H. Sea M el punto medio de AB. Sobre la recta AH se consideran puntos D y E tales que la recta MD es paralela a CI y ME es perpendicular a CI. Prueba que $AE = DH$.

Problem 3. Halla todas las cuaternas (a, b, c, d) de nmeros enteros positivos que cumplen que

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

y de manera que $ac + bd$ es divisor de $a^2 + b^2$.

Problem 4. Sean $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ cuatro números reales. Demuestra que existen $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado dos con coeficientes reales tales que x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de $P(Q(x))$ si y solamente si $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

Problem 5. Tenemos una fila de 203 casillas. Inicialmente la casilla de más a la izquierda contiene 203 fichas, y las demás están vacías. En cada movimiento podemos hacer una de estas dos operaciones:

- Tomar una ficha, y desplazarla a una casilla adyacente (a izquierda o derecha).
- Tomar exactamente 20 fichas de una misma casilla y desplazarlas todas a una casilla adyacente (todas a la izquierda o todas a la derecha).

Tras 2023 movimientos, cada casilla contiene una ficha. Demuestra que existe una ficha que se ha desplazado hacia la izquierda al menos nueve veces.

Problem 6. En el triángulo escaleno ABC con incentro I, la recta AI corta de nuevo a la circunferencia circunscrita en el punto D, y J es el punto tal que D es el punto medio de IJ. Se consideran puntos E y F en la recta BC tales que IE y JF son perpendiculares a AI. Se consideran puntos G en AE y H en AF tales que IG y JH son perpendiculares a AE y AF, respectivamente. Prueba que $BG = CH$.