Sesión de problemas
15 de enero de 2022

Problema 1. Halle los valores $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$ para los que $N = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ es un cuadrado perfecto, es decir, para los que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $N = m^2$.

Problema 2. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$. De entre los números $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n$ se eligen de cualquier forma $n+1$ números distintos. Demuestre que entre los números elegidos hay al menos dos tales que uno de ellos es divisor del otro.

Problema 3. Demuestre que en la sucesión de números 16, 1156, 111556, 11115556,..., que se van obteniendo intercalando las cifras 15 entre las cifras centrales, es una sucesión de números en la que todos ellos son cuadrados perfectos.

Problema 4. Sea p un número primo. Demuestre que si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a^p - a$ es divisible entre p.

Problema 5. Demuestre que:

a) Si p es un número primo, entonces $(p-1)! + 1$ es divisible por p.

b) Si p es un número compuesto, entonces $(p-1)! + 1$ no es divisible por p.

Problema 6. Demuestre que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

Problema 7. Demuestre que $3^{2n+2} + 2^{6n+1} \equiv 0 \pmod{11}$.

Problema 8. Demuestre que el cuadrado de todo número primo $p > 3$ es congruente con 1 módulo 12, es decir, p^2 dividido entre 12 tiene resto 1.

Problema 9. Los números α y β verifican que

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0 \qquad \text{y} \qquad \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0$$

Halle $\alpha + \beta$.

Problema 10. Se considera un triángulo equilátero de altura 1. Sea P un punto del interior del triángulo y sean x, y y z las distancias de P a los lados del triángulo.

a) Pruebe que $x + y + z = 1$ para todo punto P del interior del triángulo.

b) ¿Para qué puntos del triángulo se verifica que la distancia a un lado en mayor que la suma de las distancias a los otros dos?

c) Halle la probabilidad de de que al romper en tres trozos un bastón de longitud 1, se pueda formar un triángulo con los tres trozos.