COMBINATORIA

Manuel Cortés Izurdiaga
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga
mizurdiaga@uma.es

Preparación Olimpiada RSME

COMBINATORIA

Combinatoria

Consiste en contar el número de elementos de un conjunto finito.

COMBINATORIA

Combinatoria

Consiste en contar el número de elementos de un conjunto finito.

¡No tan fácil

1. Los conjuntos definidos por propiedades.
2. Familia de conjuntos: $S_n : n \in \mathbb{N}$.

$$f(n) = \text{Número de elementos de } S_n.$$

Cardinalidad de A

$|A| = $ Número de elementos de A.

Ejercicio

Dado el conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$, ¿cuántos subconjuntos tiene?

- $S_n =$ Conjunto formado por todos los subconjuntos de $[n]$:

$$S_n = \{A : A \subseteq [n]\}$$

- $f(n) =$Número de elementos de $S_n = |S_n|$.

COMBINATORIA

Modos de atacar el problema

1. Estudiando casos particulares.
   - **Inducción**
2. Analizando el caso general.
   - **Ecuación en diferencias**

COMBINATORIA

Modos de atacar el problema

1. Estudiando casos particulares.
   - **Inducción**
2. Analizando el caso general.
   - **Ecuación en diferencias**

Solución

$$f(n) = 2^n$$

COMBINATORIA

TÉCNICA 1

1. Buscar una regla de recurrencia.

$$f(n) \text{ en función de } f(n-1), f(n-2), \dots, f(n-k)$$

2. Resolver la ecuación en diferencias finitas.

TÉCNICA 1

1. Buscar una regla de recurrencia.

$$f(n) \text{ en función de } f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k)$$

2. Resolver la ecuación en diferencias finitas.

TÉCNICA 2

1. Probar con casos particulares.
2. Formular una conjetura.
3. Demostrarla por inducción.

CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

PROBLEMA

Partimos del conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Pretendemos contar el número de elementos de ciertos S_n formados por subconjuntos de $[n]$.

VARIACIONES

PROBLEMA 2

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos contiene $[n]$?

VARIACIONES

PROBLEMA 2

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos contiene $[n]$?

Solución. Variaciones de n elementos tomados de k en k.

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

donde $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$.

VARIACIONES

Example

¿De cuántas formas distintas se pueden repartir las medallas en una carrera en la que participan 35 personas?

Example

¿De cuántas formas distintas se pueden repartir las medallas en una carrera en la que participan 35 personas?

Solución

$$V_{35}^{3} = 35 \cdot 34 \cdot 33 = 39270$$

VARIACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 4

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos contiene $[n]$ si se pueden repetir los elementos?

VARIACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 4

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos contiene $[n]$ si se pueden repetir los elementos?

Solución Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

$$VR_n^k = n^k$$

VARIACIONES CON REPETICION

Example

¿Cuál es el número total de apuestas que se puede hacer con los 14 primeros partidos de la quiniela?

VARIACIONES CON REPETICION

Example

¿Cuál es el número total de apuestas que se puede hacer con los 14 primeros partidos de la quiniela?

Solución.

$$VR_3^{14} = 3^{14}$$

COMBINACIONES

PROBLEMA 3

¿Cuántos subconjuntos de k elementos contiene $[n]$?

Solución

Combinaciones de n elementos tomados de k en k.

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

COMBINACIONES

Example

¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos se puede extraer de un conjunto de 6 elementos?

COMBINACIONES

Example

¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos se puede extraer de un conjunto de 6 elementos?

Solución.

$$\binom{6}{3} = 20$$

NÚMEROS COMBINATORIOS

Propiedades

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Demostración. Utilizando subconjuntos de un conjunto de n elementos.

DEMOSTRACIONES

Example

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right)$$

DEMOSTRACIONES

Example

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

TÉCNICA 3

Para contar los elementos de S_n puedo:

1. Encontrar otro conjunto T_n del que conozco cuantos elementos tiene.
2. Emparejar los elementos de S_n y T_n de forma que:
   - Elementos distintos de S_n se emparejen con elementos distintos de T_n.
   - Todos los elementos de T_n estén emparejados.

Entonces S_n y T_n tienen el mismo número de elementos.

APLICACIONES BIYECTIVAS

Definición

Una aplicación $f : A \to B$ es biyectiva si:

1. Es injectiva: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.
2. Es sobreyectiva: para todo b en B existe a en A tal que $f(a) = b$.

APLICACIONES BIYECTIVAS

Definición

Una aplicación $f : A \to B$ es biyectiva si:

1. Es injectiva: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.
2. Es sobreyectiva: para todo b en B existe a en A tal que $f(a) = b$.

Teorema

$f : A \to B$ es biyectiva sí y sólo si existe $g : B \to A$ tal que

- $gf(a) = a$.
- $fg(b) = b$.

DEMOSTRACIONES

Example

Demostrar

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

DEMOSTRACIONES

Example

Demostrar

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

TÉCNICA 4

Si un conjunto A tiene dos subconjuntos B y C tales que:

1. Todo elemento de A está en B o C, es decir $A = B \cup C$.
2. B y C no tienen elementos comunes, es decir, $B \cap C = \emptyset$.

Entonces $|A| = |B| + |C|$.

NÚMEROS COMBINATORIOS

Propiedades

1. $k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$.
2. $k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = (n-k+1)\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}$.
3. $\sum_{k=0}^{k}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k+1 \\ k \end{pmatrix}$.

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

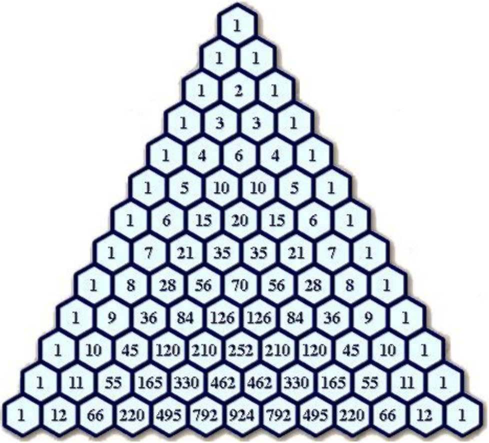

Figura: Triángulo de Tartaglia

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Example

En una urna tenemos bolas rojas, blancas y negras (al menos 4 de cada color). Se extraen 4 bolas a la vez, ¿de cuántas formas distintas pueden cogerse?

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Example

En una urna tenemos bolas rojas, blancas y negras (al menos 4 de cada color). Se extraen 4 bolas a la vez, ¿de cuántas formas distintas pueden cogerse?

Solución.

$$\binom{6}{2} = 15$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 6

Tenemos n tipos de objetos distintos y queremos extraer subconjuntos de tamaño k.

Solución

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k:

$$RC_n^k = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Example

¿Cuántas soluciones naturales tiene la ecuación

$$x + y + z + t = 13?$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Example

¿Cuántas soluciones naturales tiene la ecuación

$$x + y + z + t = 13?$$

Problema

¿Cuántas soluciones no negativas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n?$$

Solución. $\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k-1 \end{array} \right)$ ¡Hemos usado la técnica 3!

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Composiciones

Una composición de n es una suma ordenada de naturales no nulos cuya suma es n.

Composiciones de 4.

$$\begin{array}{ll} 1+1+1+1 & 3+1 \\ 2+1+1 & 1+3 \\ 1+2+1 & 2+2 \\ 1+1+2 & 4 \end{array}$$

Problema

¿Cuántas composiciones tiene n?

EJEMPLO

Reducción

¿Cuántas composiciones de tamaño k tiene n?

EJEMPLO

Reducción

¿Cuántas composiciones de tamaño k tiene n?

Solución

$$k\text{-composiciones} = \binom{n-1}{k-1}.$$

EJEMPLO

Reducción

¿Cuántas composiciones de tamaño k tiene n?

Solución

$$k\text{-composiciones} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Composiciones totales

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} =$$

EJEMPLO

Reducción

¿Cuántas composiciones de tamaño k tiene n?

Solución

$$k\text{-composiciones} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Composiciones totales

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$$

PERMUTACIONES

PROBLEMA 5

¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los elementos de $[n]$?

PERMUTACIONES

PROBLEMA 5

¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los elementos de $[n]$?

Solución. Permutaciones de n elementos.

$$P_n = n!$$

donde

$$m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1$$

Es lo mismo que...

- El número de aplicaciones biyectivas de $[n]$.
- El número de subconjuntos ordenados de n elementos de $[n]$.

PERMUTACIONES

Example

¿Cuántas palabras distintas (sin sentido o con él) se pueden crear con las letras de la palabra mixto?

PERMUTACIONES

Example

¿Cuántas palabras distintas (sin sentido o con él) se pueden crear con las letras de la palabra mixto?

Solución.

$$5! = 120$$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Example

¿Cuántas palabras distintas se pueden hacer con las letras de la palabra cara?

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Example

¿Cuántas palabras distintas se pueden hacer con las letras de la palabra cara?

Solución. $\frac{4!}{2} = 12.$

PROBLEMA 6

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos ($k \geq n$) de $[n]$ hay sabiendo que 1 se repite m_1 veces, 2, m_2 veces, etc.?

PROBLEMA 6

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos ($k \geq n$) de $[n]$ hay sabiendo que 1 se repite m_1 veces, 2, m_2 veces, etc.?

Solución

Permutaciones con repetición de n elementos repetido m_1, m_2, etc.

$$P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_n} = \frac{k!}{m_1! m_2! \cdots m_n!}$$

donde

$$k = m_1 + \cdots + m_n$$

EN RESUMEN

En resumen...

1. Hay repetición.
   1. Influye el orden: variaciones.
   2. No influye el orden: combinaciones.
2. No hay repetición.
   1. Influye el orden: variaciones con repetición.
   2. No influye el orden: combinaciones con repetición.

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

Unión e intersección de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se define:

1. su unión como

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

2. su intersección como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

Principio de inclusión-exclusión

Dados dos conjuntos A y B,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

Principio de inclusión-exclusión

Dados dos conjuntos A y B,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Más generalmente...

Dados tres conjuntos A, B y C,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

Example

¿Cuántos números primos hay menores que 111?

PRINCIPIO DEL PALOMAR

Principio del palomar

Si tenemos n palomas que queremos repartir en m palomares $n > m$, entonces al menos un palomar tendrá $E\left(\frac{n}{m}\right) + 1$ palomas.

PRINCIPIO DEL PALOMAR

Example

La ciudad de New York tiene 7 500 000 habitantes. Se sabe que el número máximo de pelos que puede tener una cabeza humana es de 500 000. Prueba que hay al menos 15 habitantes de New York con exactamente el mismo número de pelos en la cabeza.

Example

Dados n números naturales positivos, probar que se cumple una de las dos condiciones siguientes:

- Uno de ellos es múltiplo de n.
- La suma de algunos de ellos es múltiplo de n.

BINOMIO DE NEWTON

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Aplicaciones

Ejercicios

1. $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n.$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 0.$
3. $\sum_{k=1}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n2^{n-1}.$

Ecuaciones en diferencias finitas

Problema

Encontrar la expresión de una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$a_k f(n+k) + a_{k-1} f(n+k-1) + \cdots + a_0 f(n) = g(n)$$

donde

- $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$
- $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función.

Ejemplo

Ejercicio

$$f(n+2) - 4f(n) = n, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{3}$$

Problemas de olimpiadas

1. ¿De cuántas formas se pueden colorear los vértices de un polígono con $n \geq 3$ lados usando tres colores de forma que haya exactamente m lados, $2 \leq m \leq n$, con los extremos de colores diferentes?
2. Los puntos de una superficie esférica de radio 4 se pintan con cuatro colores distintos. Prueba que existen dos puntos sobre la superficie que tienen el mismo color y que están a distancia $4\sqrt{3}$ o bien a distancia $2\sqrt{6}$ (la distancia que se considera es la distancia euclídea en $\mathbb{R}^3$).