Preparatoria Olimpiada Matemática.

Problema 1. ¿Es posible colorear los números enteros con dos colores de modo que no existan progresiones aritméticas monocromáticas?

Problema 2. En una fila hay n cajas. La primera caja contiene 1 canica, la segunda caja contiene 2 canicas,..., la caja en la posición i contiene i canicas. Determinar todos los valores de n para los que es posible repartir las cajas entre dos personas de modo que cada persona tenga la misma cantidad de canicas.

Problema 3. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales y m un número impar menor o igual que n de modo que el producto de m de ellos cualesquiera es mayor o igual a 1. Demuestra que $a_1 a_2 ... a_n$ es mayor o igual a 1.

Problema 4. Determina todos los polinomios P, Q de coeficientes reales tales que

$$P(Q(x)) = Q(P(x)) = P(x) \cdot Q(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema 5. Demuestra que no existe ningún polinomio $P(x)$ de coeficientes enteros tal que existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ de modo que $P(n)$ es un número primo para todo $n \geq n_0$.

Problema 6. Los números naturales se colorean de azul y rojo de forma que la suma de dos naturales de color azul es de color azul y el producto de dos naturales de color rojo es de color rojo. Caracteriza todas las coloraciones posibles.

Problema 7. Demuestra que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ es natural solo para $n = 1$.

Problema 8. En el plano se sitúan $n > 1$ puntos distintos de forma que para cada par de puntos distintos A, B , existe un tercer punto C tal que ABC es un triángulo equilátero. Demuestra que no pueden haber más de tres puntos.

Problema 9. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ enteros positivos distintos y M un conjunto de $n - 1$ enteros positivos que no contiene a $a_1 + a_2 + ... + a_n$. Demuestra que, comenzando en 0, es posible dar n saltos de longitudes $a_1, a_2, ..., a_n$ en algún orden de modo que nunca se pasa por un elemento de M.

Problemas Olimpiada Matemática.

Problema 1. Analítico

a) Supongamos que x es un número real positivo irracional. Demuestra que $\sqrt{x}$ también es irracional. ¿Es cierto que si x es irracional x^2 también es irracional?

b) Demuestra que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Problema 2. Números

Demuestra que si n es un número entero positivo $4^n - 1$ es siempre es un múltiplo de 3.

Problema 3. Combinatoria

¿Cuántos números pares que no son múltiplo de 5 hay entre 0 y 2022?

Problema 4. Algebraico

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio con dos raíces distintas α, β. Utiliza la ecuación de segundo grado para ver que $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ y $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

Problema 5. Números

a) Demuestra que el anterior o el posterior a un número primo mayor a 3 es un múltiplo de 6.

b) Sabiendo esto, demuestra que si $p > 3$ es primo, entonces $p^2 - 1$ es un múltiplo de 6. ¿Es cierto que es un múltiplo de 12 también?¿Y de 24?

Problema 6. Números

Sabemos que un número N no tiene ningún divisor más pequeño que $\sqrt{N}$. Demuestra que N es primo.

Problema 7. Analítico

a) Determina los valores de A, B para los que $\frac{1}{k^2+k} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$.

b) Calcula $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$.

Problema 8. Desigualdades

Demuestra que:

a) $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, si $x, y > 0$. ¿Sería cierto si $x, y < 0$?